Nom :

Interrogation 20

Exercice 1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ pour E de dimension finie.

1. Montrer que : $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$.
2. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$: montrer que $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$, et en déduire que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires dans E.

1. On procède par double implication, et par double inclusion à chaque fois :
   — si $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0\}$:
     — soit $x \in \mathrm{Ker}f$: alors $f(x) = 0$ puis $f(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}f^2$;
     — soit $x \in \mathrm{Ker}f^2$: alors $f^2(x) = 0 = f(f(x))$. Donc $f(x) \in \mathrm{Ker}f$. Mais $f(x) \in \mathrm{Im}f$ par définition. Donc $f(x) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}f$.

     D'où l'égalité par double inclusion (et la propriété n'est utile que pour la seconde inclusion comme la première est toujours vraie).

   — si $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$:
     — comme $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont des sous-espaces vectoriels de E, on a bien $\{0\} \subset \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f$;
     — soit $y \in \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f$: notons $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a également $f(y) = 0$. Et ainsi : $0 = f(y) = f(f(x)) = f^2(x)$. Donc $x \in \mathrm{Ker}f^2 = \mathrm{Ker}f$. Donc $x \in \mathrm{Ker}f$. Donc $y = f(x) = 0$.

     D'où l'égalité par double inclusion.

   D'où l'équivalence.
2. Par la même démonstration que la question 1, on a : $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}f^2$. Il suffit donc de montrer l'égalité des dimensions.

   Par théorème du rang appliqué à f et à f^2, on a :

   $$\mathrm{dim}E = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{dimKer}f = \mathrm{rg}(f^2) + \mathrm{dimKer}f^2$$

   et ainsi, comme $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$, on a bien $\mathrm{dimKer}f = \mathrm{dimKer}f^2$.

   Par inclusion et égalité des dimension, on a donc : $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$.

   Par la question 1, on a donc $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0\}$.

   Mais par théorème du rang, on a également : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\mathrm{Ker}f)$.

   Et ainsi par caractérisation des supplémentaires en dimension finie : $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 2 Comme il n'y a que 7 boules noires, au pire des cas on tire les 7 boules noires en premier, puis une noire, donc 8 tirages.

Comme on fait au moins un tirage, on déduit déjà que : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

On calcule les probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ par formule des probabilités composées :

— pour $\mathbb{P}(X = 1)$: on tire directement une boule blanche. La probabilité est $\frac{3}{10}$ comme il y a 7 boules noires pour 10 boules en tout ;

— pour $\mathbb{P}(X = 2)$: on tire d'abord une boule noire, puis une boule blanche. Par formule des probabilités composées, cette probabilité est $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$ (7 boules noires pour 10 boules, puis 3 boules blanches pour 9 boules) ;

— on procède de même pour les autres probabilités, ce qui donne :

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{7 \times 6 \times 3}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7}{40},\ \mathbb{P}(X = 4) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 3}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(X = 5) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{1}{12},\ \mathbb{P}(X = 6) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5} = \frac{1}{20}$$

$$\mathbb{P}(X = 7) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{40},\ \mathbb{P}(X = 8) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{120}$$

Et on vérifie qu'on a bien une distribution de probabilités :

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{30} + \frac{7}{40} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{120} = \frac{36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1}{120} = 1.$$

Exercice 3 On considère trois cagettes de 100 kiwis chacune : deux contiennent des kiwis jaunes, et l'autre des kiwis verts. On suppose de plus que les kiwis sont tous poilus, soit lisses, et que : un kiwi jaune sur 10 est poilu (et les autres sont lisses), tandis que neuf kiwis verts sur 10 sont poilus (et les autres sont lisses. On place tous ces kiwis sur un même étal : le soleil brille trop fort et aveugle au point de ne pouvoir bien distinguer les kiwis ; et on porte des gants qui empêche de les distinguer au toucher.

1. On note l'événement J ="tirer un kiwi jaune" (donc $\overline{J}$ ="tirer un kiwi vert) et L ="tirer un kiwi lisse" (donc $\overline{L}$ ="tirer un kiwi poilu"). Par formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(J, \overline{J})$, on a :

$$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(J) \cdot \mathbb{P}_J(L) + \mathbb{P}(\overline{J}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{J}}(L) = \frac{200}{300} \cdot \frac{9}{10} + \frac{100}{300} \cdot \frac{1}{10} = \frac{19}{30}.$$

2. Par formule de Bayes, on a :

$$\mathbb{P}_{\overline{L}}(J) = \frac{\mathbb{P}_J(\overline{L}) \cdot \mathbb{P}(J)}{\mathbb{P}(\overline{L})} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{2}{11}.$$