Interrogation 1 : corrigé

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère l'assertion suivante :

$$(\exists k \in \mathbb{Z},\ a \times b = 2k) \Rightarrow ((\exists m \in \mathbb{Z},\ a = 2m) \text{ ou } (\exists n \in \mathbb{Z},\ b = 2n))$$

1. Écrire en français cette assertion.
2. Écrire en symboles mathématiques sa négation.
3. Écrire en symboles mathématiques sa contraposée.
4. Écrire en français sa contraposée.
5. Prouver l'assertion de départ.

1. Si le produit $a \times b$ est pair, alors a est pair ou b est pair.
2. La négation de $A \Rightarrow B$ est A et non B, donc ici :

$$(\exists k \in \mathbb{Z},\ a \times b = 2k) \text{ et } (\forall m \in \mathbb{Z},\ a \neq 2m) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{Z},\ b \neq 2n)$$

3. Sa contraposée est :

$$((\forall m \in \mathbb{Z},\ a \neq 2m) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{Z},\ b \neq 2n)) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z},\ a \times b \neq 2k)$$

4. En français : le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
5. On prouve la contraposée, ce qui est équivalent. Soient a, b deux entiers impairs. On pose $a = 2m + 1$ et $b = 2n + 1$ pour $m, n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$a \times b = (2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2\left(\underbrace{2mn + m + n}_{\in \mathbb{Z}}\right) + 1$$

donc $a \times b$ est impair, ce qui conclut la preuve.

Exercice 2

1. Soit $n \geq 3$. Alors :

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 2^2 - 2 = 2 > 0$$

donc $2n^2 > (n+1)^2$.

2. Par récurrence sur n :
   - initialisation : pour $n = 5$, on a : $2^5 = 32$ et $n^2 = 25$ donc $2^n > n^2$;
   - hérédité : soit $n \geq 5$ tel que $2^n > n^2$. Alors :

   $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 \geq (n+1)^2$$

   en notant que, comme $n \geq 5$, on a $n \geq 3$ et on peut appliquer le point 1. Ce qui prouve l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.

Exercice 3 Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausse, et le prouver :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| \geq y \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$

Les deux assertions sont fausses : comme expliqué en classe, on a un problème si $y < 0$ en toute généralité. Le choix $x = 0$ et $y = -1$ donne un contre-exemple dans chaque cas :

1. avec $y = -1$ et $x = 0$, on a $x^2 = 0 \leq 1 = y^2$, donc l'assertion de droite est vraie, mais $|x| = 0 > -1$, donc l'assertion de gauche est fausse. Ce qui invalide l'équivalence.
2. avec $y = -1$ et $x = 0$, on a : $|x| = 0 \geq -1$, donc l'assertion de gauche est vraie, mais $x^2 = 0 < 1 = y^2$ donc l'assertion de droite est fausse. Ce qui invalide l'équivalence.

Exercice 4

1. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On écrit alors : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible, c'est-à-dire que $a, b \in \mathbb{N}$ sont sans diviseur commun autre que 1.

   En élevant au carré, il vient : $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, et donc :
   — $a^2 = 2b^2$ est pair, donc a est pair, et on peut écrire $a = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$;
   — en réinjectant, il vient : $b^2 = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{(2n)^2}{2} = \dfrac{4n^2}{2} = 2n^2$ est pair, donc b est pair.
   D'où la contradiction, car alors 2 diviserait a et b.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b\sqrt{2} = 0$. Supposons par l'absurde que a ou b est non nul.

   Si b est non nul : alors on déduit : $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde comme $\sqrt{2}$ est irrationnel.

   Si a est non nul : alors $b = \dfrac{-a}{\sqrt{2}} \neq 0$, donc on se ramène au cas précédent, et on a encore une contradiction.

   D'où le résultat.
3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Alors $(a - c) + (b - d)\sqrt{2} = 0$. Mais $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ donc $(a - c), (b - d) \in \mathbb{Z}$, donc d'après le point précédent : $a - c = b - d = 0$.

   Donc $a = c$ et $b = d$, ce qui prouve bien le résultat.