Nom :

Interrogation 19

Exercice 1 On considère l'application $f : P \mapsto XP'$ définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau et le rang de f. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\deg(P) \leq n$ donc $\deg(P') \leq n-1$ puis $\deg(f(P)) = 1 + \deg(P') \leq n$. Donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ce qui assure la stabilité.

   Pour la linéarité : soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors par linéarité de la dérivation :

   $$f(\lambda P + \mu Q) = X\left(\lambda P + \mu Q\right)' = X\left(\lambda P' + \mu Q'\right) = \lambda XP' + \mu XQ' = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

   D'où la linéarité.

   Donc f est une application linéaire de E dans E : c'est un endomorphisme de E.

2. Pour le noyau : soit $P \in E$. Alors :

   $$f(P) = 0 \Leftrightarrow XP' = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_0[X]$$

   (par intégrité du produit entre polynômes). Et ainsi : $\mathrm{Ker} f = \mathbb{R}_0[X]$.

   On a directement que $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$. Par théorème du rang :

   $$\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker} f) = (n+1) - 1 = n$$

   et ainsi :
   — f n'est pas injective : son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$;
   — f n'est pas surjective : son rang de vaut pas $(n+1) = \dim(E)$;
   — f n'est pas surjective : elle n'est ni injective ni surjective.
   Et on pouvait aussi utiliser que, en tant qu'endomorphisme sur E de dimension finie, on a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité de f.

3. On a déjà, par théorème du rang, que : $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim E$. Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, il suffit de prouver qu'ils sont en somme directe.

   Soit $P \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$. Alors P est constant, et il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = f(Q) = XQ'$. Mais alors, par considérations de degrés, $Q' = 0$ (sinon P ne serait pas constant). Donc $P = 0$. Et finalement : $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ (l'autre inclusion est toujours vérifiée, comme ce sont des espaces vectoriels).

   Et finalement : $\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = E$.

Exercice 2 Soient E de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

1. Soit $y \in \text{Im}(f+g)$. Notons $x \in E$ tel que $y = (f+g)(x)$. Alors $y = f(x) + g(x) \in \text{Im}f + \text{Im}g$. D'où l'inclusion.
2. Par formule de Grassmann, on a :
$$\dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g) = \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Im}g) - \dim(\text{Im}f + \text{Im}g)$$
et comme $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}f + \text{Im}g$, on a donc : $\dim(\text{Im}f + \text{Im}g) \geq \dim\text{Im}(f+g) = \text{rg}(f+g)$. Et finalement :
$$\dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \text{rg}(f+g) = 0$$
donc $\dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g)$, c'est-à-dire $\text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\}$.
3. On a déjà prouvé une inclusion. Il suffit d'avoir l'égalité des dimensions. Mais avec la question précédente on a :
$$\begin{aligned}\dim(\text{Im}f + \text{Im}g) = \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Im}g) - \dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g) &= \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - 0 \\ &= \text{rg}(f+g) = \dim(\text{Im}(f+g))\end{aligned}$$
et donc par inclusion et égalité des dimensions, on a bien l'égalité cherchée.
4. On déduit que $\text{Im}f \subset \text{Im}(f+g)$ et $\text{Im}g \subset \text{Im}(f+g)$ et comme on a de plus : $\text{Im}(f+g) = \text{Im}f + \text{Im}g$ et $\text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\}$, par caractérisation des supplémentaires en dimension finie on a bien le résultat.

   On aurait aussi pu utiliser le résultat des dimensions (cela revient au même). Le point clé est de ne pas oublier que $\text{Im}f \subset \text{Im}(f+g)$ et $\text{Im}g \subset \text{Im}(f+g)$ (la formulation de la question aider à ne pas l'oublier) mais sinon il manque une information.

Exercice 3

1. Les racines de $B = X^4 - 1$ sont les racines quatrième de l'unité, toutes simples, donc ± 1 et $\pm i$, et B est unitaire. D'où les décompositions sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$:
$$B = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) = (X-1)(X+1)(X^2+1).$$
2. On a une écriture :
$$\frac{X^4}{X^4-1} = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}$$
et on trouve a, b, c, d en multipliant par $X \mp 1$ ou $X \mp i$ et en évaluant en ± 1 ou $\pm i$. On peut aller plus vite avec des symétries (changer X en $-X$ par exemple, qui donne $a = -b$ et $c = -d$) et on obtient :
$$\frac{X^4}{X^4-1} = 1 + \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} + \frac{i/4}{X-i} - \frac{i/4}{X+i}$$
3. On regroupe les éléments complexes. On trouve :
$$\frac{X^4}{X^4-1} = 1 + \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} - \frac{1/2}{X^2+1}$$