

Nom :

---

## Interrogation 19

**Exercice 1** On considère l'application  $f : P \mapsto XP'$  définie sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer le noyau et le rang de  $f$ . L'application  $f$  est-elle injective ? Surjective ?  
Bijective ?
3. Montrer que  $\text{Im}f$  et  $\text{Ker}f$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 2** Soient  $E$  de dimension finie et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}f + \text{Im}g$ .
2. En utilisant la formule de Grassmann, montrer que  $\text{Im}f \cap \text{Im}g = \{0\}$ .
3. En déduire que  $\text{Im}(f + g) = \text{Im}f + \text{Im}g$ .
4. En déduire que  $\text{Im}f$  et  $\text{Im}g$  sont deux sous-espace supplémentaires dans  $\text{Im}(f + g)$ .

**Exercice 3** 1. Déterminer la décomposition en produit d'irréductibles sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$  de  $B = X^4 - 1$ .

2. Donner la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  de  $\frac{X^4}{X^4 - 1}$ .
3. En déduire la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  de  $\frac{X^4}{X^4 - 1}$ .