Nom :

Interrogation 18

Exercice 1 On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ dans lequel on note :

$$e_1 = 1,\ e_2 = 1 + X,\ e_3 = 1 + X + X^2.$$

1. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E et donner les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans cette base.
2. En déduire l'expression générale de $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie : $f(e_1) = -e_1,\ f(e_2) = -e_2$ et $f(e_3) = e_3$.
3. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, résoudre les équations :
$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xe_1 + ye_2 + ze_3 \text{ et } f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = -xe_1 - ye_2 - ze_3$$
et en déduire $\mathrm{Ker}(f \pm \mathrm{id})$ (dont on donnera des bases).
4. Calculer f^2 et décrire f le plus précisément.

1. La famille (e_1, e_2, e_3) est graduée : c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :
$$P = aX^2+bX+c = xe_1+ye_2+ze_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= c \\ y+z &= b \\ z &= a \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = (c-b, b-a, a)$$
et donc les coordonnées sont $(c-b, b-a, a)$.
2. Par linéarité, on a directement :
$$f(aX^2+bX+c) = f((c-b)e_1+(b-a)e_2+ae_3) = (b-c)e_1+(a-b)e_2+ae_3 = (2a-c)+(2a-b)X+aX^2$$
3. Par linéarité, on a directement :
$$f(xe_1+ye_2+ze_3) = xe_1+ye_2+ze_3 \Leftrightarrow -xe_1-ye_2+ze_3 = xe_1+ye_2+ze_3 \Leftrightarrow x = y = 0$$
$$f(xe_1+ye_2+ze_3) = -xe_1-ye_2-ze_3 \Leftrightarrow -xe_1-ye_2+ze_1 = -xe_1-ye_2-ze_3 \Leftrightarrow z = 0$$
Et ainsi :
$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \,|\, x = y = 0\} = \{ze_3\} = \mathrm{Vect}(e_3)$$
$$\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \,|\, z = 0\} = \{xe_1 + ye_2\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$$
et on a bien à chaque fois des bases : génératrices par construction, et libre comme extraite de la famille libre (e_1, e_2, e_3).
4. Par l'expression précédente :
$$f \circ f(aX^2 + bX + c) = f((2a-c) + (2a-b)X + aX^2)$$
$$= (2a - (2a-c)) + (2a - (2a-b))X + aX^2 = aX^2 + bX + c$$
donc $f \circ f = \mathrm{id}$: c'est donc la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(e_3)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On pose $P_n = X^{n+3} - (n+2)X^{n+2} + (2n+1)X^{n+1} - nX^n$.

1. Déterminer une racine évidente de P_n, et donner sa multiplicité.
2. Déterminer la multiplicité de 1 comme racine de P_n.
3. Montrer que P_n est scindé, et donner toutes ses racines avec multiplicité.

1. 0 est racine évidente, de multiplicité n : X^n divise P_n, car il divise tous ses monômes, mais pas X^{n+1}.
2. On évalue la valeur de P_n et de ses dérivées en 1 :
$$P_n(1) = 1 - (n+2) + (2n+1) - n = 0$$
$$P_n'(1) = n + 3 - (n+2)^2 + (2n+1)(n+1) - n^2 = 0$$
$$P_n''(1) = (n+3)(n+2) - (n+2)^2(n+1) + (2n+1)(n+1)n - n^2(n-1) = -2n + 2 \neq 0$$
donc 1 est racine de multiplicité 2.
3. Comme P_n possède déjà $n+2$ racines (avec multiplicités) et est de degré $n+3$, il lui manquerait une seule racine. Mais en écrivant $P = X^n(X-1)^2Q$, alors Q est unitaire de degré 1, donc de la forme $X - \alpha$, où α est la dernière racine de P. En regardant le coefficient de degré $n-1$ de P_n, qui vaut l'opposé de la somme des racines, donc $0 \cdot n + 1 \cdot 2 + \alpha$, on trouve $\alpha = n$. Et P_n est scindé, de racines : 0 de multiplicité n, 1 double, et n simple.

Exercice 3 1. Donner les racines de $B = X^2 + X - 2$ et leur multiplicité.

2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de $A_n = X^n - X^{n-1} + 2^{n-1}X - 2^{n-1}$ par $X^2 + X - 2$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on que B divise A_n ?

1. 1 est racine évidente. L'autre racine est -2 (produit des racines) donc B a pour racines 1 et -2. Comme B est de degré 2, ces deux racines sont simples.
2. On pose $A_n = BQ_n + R_n$, avec Q_n et R_n le quotient et le reste de la division euclidienne de A_n par B. Alors $\deg(R_n) < \deg(B) = 2$ donc $R_n = a_nX + b_n$. Et comme 1 et -2 sont racines de B :
$$R_n(1) = a_n + b_n = A_n(1) = 1 - 1 + 2^{n-1} - 2^{n-1} = 0$$
$$\begin{aligned} R_n(-2) = -2a_n + b_n = A_n(-2) &= (-2)^n - (-2)^{n-1} - 2^n - 2^{n-1} \\ &= 2^n\left((-1)^n - 1\right) + 2^{n-1}\left(-(-1)^{n-1} - 1\right) = 3 \cdot 2^{n-1}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$
et donc : $a_n = 2^{n-1}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -2^n & \text{si} \quad n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \end{cases}$ et $b_n = -a_n$
3. Par division euclidienne : B divise A_n si, et seulement si, $R_n = 0$, c'est-à-dire $a_n = b_n = 0$. Donc B divise A_n si, et seulement si, n est pair.