Nom :

Interrogation 18

Exercice 1 On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ dans lequel on note :

$$e_1 = 1,\ e_2 = 1 + X,\ e_3 = 1 + X + X^2.$$

1. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E et donner les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans cette base.
2. En déduire l'expression générale de $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie : $f(e_1) = -e_1,\ f(e_2) = -e_2$ et $f(e_3) = e_3$.
3. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, résoudre les équations :

   $$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xe_1 + ye_2 + ze_3 \text{ et } f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = -xe_1 - ye_2 - ze_3$$

   et en déduire $\mathrm{Ker}(f \pm \mathrm{id})$ (dont on donnera des bases).
4. Calculer f^2 et décrire f le plus précisément.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On pose $P_n = X^{n+3} - (n+2)X^{n+2} + (2n+1)X^{n+1} - nX^n$.

1. Déterminer une racine évidente de P_n, et donner sa multiplicité.
2. Déterminer la multiplicité de 1 comme racine de P_n.
3. Montrer que P_n est scindé, et donner toutes ses racines avec multiplicité.

Exercice 3

1. Donner les racines de $B = X^2 + X - 2$ et leur multiplicité.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de $A_n = X^n - X^{n-1} + 2^{n-1}X - 2^{n-1}$ par $X^2 + X - 2$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on que B divise A_n ?