Nom :

# Interrogation 17

**Exercice 1** On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ , $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ , $e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ses coordonnées dans cette base.
2. En déduire l'expression générale de l'unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ qui vérifie $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_3$.
3. Donner le noyau et l'image de $f$.

1. Soient $a, x, z, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \nu &= x \\ \mu + \nu &= y \\ \nu &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu &= z \\ \mu &= y - z \\ \lambda &= x - y \end{cases}.$$
Par existence et unicité de solution on a bien une base, et les coordonnées de $(x, y, z)$ dans cette base sont $(x - y, y - z, z)$.
2. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par linéarité :
$$f(x, y, z) = f((x-y)e_1 + (y-z)e_2 + ze_3) = (x-y)f(e_1) + (y-z)f(e_2) + zf(e_3) = xe_3$$
3. Comme $(e_1, e_2, e_3)$ est une base, l'image de $f$ est $\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(e_3)$.
Par l'écriture précédente : $(x, y, z) \in \text{Ker} f \Leftrightarrow x = 0$ donc $\text{Ker} f = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

**Exercice 2** Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, du nombre de solution de l'équation $\ln(x) = ax$.

On étudie les variations de $g_a : x \mapsto \ln(x) - ax$ sur $\mathbb{R}_+^*$ suivant la valeur de $a$. On souhaite savoir quand elle s'annule :

— si $a \leq 0$ : elle est strictement croissante (somme d'une fonction croissante et d'une strictement croissante) de limites $-\infty$ et $+\infty$ en $0^+$ et en $+\infty$ (pas de FI) et continue : par théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, donc elle s'annule une unique fois ;

— si $a > 0$ : elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par combinaison linéaire, de dérivée :
$$x \mapsto \frac{1}{x} - a \text{ qui est } \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad x < 1/a \\ = 0 & \text{si} \quad x = 1/a \\ < 0 & \text{si} \quad x > 1/a \end{cases}$$
et donc $g$ atteint son maximum en $1/a$. Comme $g$ tend vers $-\infty$ en $0^+$ et en $+\infty$ (croissances comparées en $+\infty$ et calcul direct en 0), on déduit que :

— si $a = 1/e$ : alors $g(1/a) = \ln(e) - 1 = 0$ et l'équation admet $x = e$ comme unique solution ;
— si $a > 1/e$ : alors $g(1/a) = \ln(1/a) - 1 < 0$ et l'équation n'admet aucune solution ;
— si $a < 1/e$ : alors $g(1/a) = \ln(1/a) - 1 > 0$ et l'équation admet deux solutions par corollaire du TVI (une sur $]0; 1/a[$ et l'autre sur $]1/a; +\infty[$).

**Exercice 3** 1. Rappeler, avec les bonnes hypothèses, la formule de Leibniz.

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n$-ème de $x \mapsto (x^2 - 2x + 3)e^x$ (après avoir justifié qu'elle existe bien).

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, et $f, g$ de classe $\mathcal{C}^n$. Alors $(fg)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2. Les fonctions $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$ et $g : x \mapsto e^x$ sont infiniment dérivables (polynôme et fonction usuelle), donc $\mathcal{C}^n$. Et on a pour $f$ :

$$f' : x \mapsto 2x - 2,\ f'' : x \mapsto 2 \text{ et } \forall k > 2,\ f^{(k)} : x \mapsto 0$$

et pour $g$ :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g^{(k)} = g : x \mapsto e^x$$

donc par formule de Leibniz la dérivée cherchée est :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \left( (x^2 - 2x + 3) + n(2x - 2) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \right) e^x$$

$$= \left( x^2 + (2n - 2)x + (n^2 - n + 3) \right) e^x.$$

**Exercice 4** Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x}{\ln(x) + 1}$. On pose $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ :

1. Par inégalité classique, pour tout $x > 0$ : $\ln(x) \leq x - 1$ et donc pour tout $x > 1/e$ : $\dfrac{2x}{\ln(x) + 1} > 2$.

   En particulier : $[1; +\infty[$ est stable par $f$, donc la suite $(u_n)$ est bien définie.

2. Notons que $f(e) = e$.

   De plus, $f$ est dérivable sur $[1; +\infty[$ de dérivée :

$$f' : x \mapsto \frac{2\ln(x) + 2 - 2}{(\ln(x) + 1)^2} = \frac{2\ln(x)}{(\ln(x) + 1)^2}.$$

Mais on sait que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (même $\mathbb{R}$) : $(1-\alpha)^2 \geq 0$. Donc $(1+\alpha)^2 \geq 4\alpha$. Et ainsi avec $\alpha = \ln(x)$ pour $x \geq 1$, on a :

$$0 \leq f'(x) = \frac{1}{2}\frac{4\ln(x)}{(1+\ln(x))^2} \leq \frac{1}{2}$$

donc par inégalité des accroissements finis, $f$ est 1/2-lipschitzienne sur $[1;+\infty[$.

Et en utilisant que $f(e) = e$ et que $f(u_n) = u_{n+1}$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - e| = |f(u_n) - f(e)| \leq \frac{1}{2}|u_n - e|.$$

Et par récurrence on déduit que pour un tel $n \in \mathbb{N}$ :

$$|u_n - e| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - e|$$

3. Comme $|1/2| < 1$, on a : $\lim \frac{e-1}{2^n} = 0$. Et par encadrement : $\lim u_n = e$.