Nom :

Interrogation 16

Exercice 1 Énoncer proprement et avec les bonnes hypothèses le théorème de caractérisation séquentielle de la limite.

Soit f définie sur I, a adhérent à I et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Il y a équivalence entre :
— f tend vers l en a ;
— pour toute suite (u_n) d'éléments de I tendant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers l.

Exercice 2 Montrer que $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$ est un espace vectoriel et que $(\cos, \sin)$ en est une base. Pour $f \in E$, donner les coordonnées de f dans cette base.

On résout l'équation différentielle : l'équation caractéristique est $X^2+1 = 0$, de solutions $\pm i$. Donc $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ est un espace vectoriel.

On déduit au passage que $(\cos, \sin)$ engendre E.

Et les fonctions cos et sin sont clairement non proportionnelles (elles ne valent pas 0 aux mêmes points), donc cette famille est libre.

Et c'est donc bien une base de E.

Si $f \in E$: posons $f = \lambda\cos + \mu\sin$. En évaluant en 0 et en $\pi/2$, on trouve $\lambda = f(0)$ et $\mu = f(\pi/2)$. Et donc les coordonnées de f dans cette base sont $(f(0), f(\pi/2))$.

Autre méthode : on évalue en 0, et on dérive puis on évalue en 0. Ce qui donne comme coordonnées dans cette base : $(f(0), f'(0))$. C'est plus joli car ça permet de bien faire apparaître les conditions initiales (c'est bieng).

Exercice 3 On considère $T > 0$.

1. Pour $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, énoncer proprement la définition de "f est T-périodique".
2. Montrer que l'ensemble des fonctions T périodiques sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

1. La fonction f est T-périodique si :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$
2. On déduit que l'ensemble considéré (qu'on note E) est un espace vectoriel :
   — la fonction nulle est dans E : posons $f = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 0 = f(x+T)$.
   — E est stable par combinaisons linéaires : soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda f(x+T) + \mu g(x+T) = h(x+T)$$
   en utilisant la définition précédente. Donc $h \in E$.
   Donc E est une sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: c'est un espace vectoriel.

Exercice 4 On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f : (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer f^2.
3. En déduire une description la plus précise possible de f.

1. On peut le faire par calcul, ou directement reconnaître que f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :
$$f^2(x,y) = f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}}{2}, \frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = f(x,y)$$
3. Donc $f^2 = f$: c'est un projecteur.
   Pour le décrire précisément, il faut donner $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$:
   — pour $\mathrm{Ker} f$:
$$(x,y) \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x+y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$
   — pour $\mathrm{Im} f$:
$$(x,y) \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow f(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = x = y \Leftrightarrow x = y$$
   Et finalement : f est le projecteur sur la droite d'équation $y = x$ parallèlement à la droite d'équation $y = -x$.