Nom :

Interrogation 15

Exercice 1 1. Si $a \neq 0$: alors $(0,0,0) \notin E$ donc E n'est pas un espace vectoriel.

Sinon : $(0,0,0) \in E$. Et pour $(x,y,z),(a,b,c) \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda(x,y,z) + \mu(a,b,c) = (\lambda x + \mu a, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c)$ qui est bien un élément de E car :

$$(\lambda x + \mu a) + (\lambda y + \mu b) + 6(\lambda z + \mu c) = \lambda(x+y+6z) + \mu(a+b+6c) = 0$$

Donc E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: c'est un espace vectoriel.

2. Pour trouver une base, considérons $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$(x,y,z) \in E \Leftrightarrow x+y+6z = 0 \Leftrightarrow x = -y-6z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-6z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et ainsi $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Et la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est bien une base de E : elle est génératrice (par construction), et elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires (des 0 pas au même endroit dans les coordonnées) donc elle est libre.

Remarque : avec le nouveau chapitre, on peut aussi noter directement que $E = \text{Ker}\varphi$ pour $\varphi : (x,y,z) \mapsto x+y+6z$ est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ce qui donne que c'est directement un espace vectoriel. Il faut en revanche refaire les calculs pour avoir une base (pas le choix).

Exercice 2 On pourrait montrer que F contient la suite nulle et qu'il est stable par combinaison linéaire. On va montrer tout en une seule fois.

Les éléments de F sont exactement les suites de la forme $(u_n) = (\lambda 2^n + \mu 3^n) = \lambda v + \mu w$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: on reconnaît en effet les suites linéaires récurrentes d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$.

Et ainsi $F = \text{Vect}(v,w)$. Mais les suites v et w ne sont clairement pas proportionnelles, donc forment une famille libre. Et donc (v,w) est bien une base de F.

Et on retrouve au passage que $v, w \in F$ en prenant $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ ou l'inverse.

Exercice 3 Montrer que la famille $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \sin, \exp)$ est libre.

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + \mu \sin + \nu \exp$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda x + \mu \sin(x) + \nu \exp(x) = 0$$

En évaluant en 0, il vient : $\nu = 0$.

En évaluant en π, et en utilisant que $\nu = 0$, on déduit : $\lambda\pi = 0$, donc $\lambda = 0$.

En évaluant en $\pi/2$ et en utilisant que $\nu = \lambda = 0$, on déduit : $\mu = 0$.

Et donc $\lambda = \mu = \nu = 0$: la famille est libre !

Exercice 4

1. Pour $f : I \to \mathbb{R}$, donner les définitions de :
   (a) f tend vers l en $-\infty$ (pour $l \in \mathbb{R}$) ;
   (b) f tend vers $-\infty$ en a (pour $a \in \mathbb{R}$).
2. Donner le théorème de caractérisation séquentielle de la limite.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

1. (a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$.
   (b) $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq B$.
2. Soit f définie sur I, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I, et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Il y a équivalence entre :
   — f tend vers l en a ;
   — pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$, si $\lim u_n = a$, alors $\lim f(u_n) = l$.
3. On montre par caractérisation séquentielle que $\sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0. Pour cela, on pose $(u_n) = \left(\dfrac{1}{n\pi + \pi/2}\right)$, qui est une suite de réels non nuls qui tend vers 0 (par quotient). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin\left((n + 1/2)\pi\right) = (-1)^n$$

   qui n'a pas de limite.

   Donc $x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (par caractérisation séquentielle), donc n'est pas prolongeable par continuité en 0.