

Nom :

Interrogation 15

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'ensemble : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 6z = a\}$.

1. Dire si l'ensemble E est ou non un espace vectoriel, et le prouver (on pourra discuter suivant la valeur de a).
2. On suppose ici que $a = 0$. Donner une base de E .

Exercice 2 On considère $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. On pose $(v_n) = (2^n)$ et $(w_n) = (3^n)$.
 - (a) Montrer que v et w sont des éléments de F .
 - (b) Montrer que la famille (v, w) est libre.
 - (c) Montrer que la famille (v, w) est une base de E .

Exercice 3 Montrer que la famille $(\text{id}_{\mathbb{R}}, \sin, \exp)$ est libre.

Exercice 4 1. Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, donner les définitions de :

(a) f tend vers l en $-\infty$ (pour $l \in \mathbb{R}$);

(b) f tend vers $-\infty$ en a (pour $a \in \mathbb{R}$).

2. Donner le théorème de caractérisation séquentielle de la limite.

3. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.