Nom :

Interrogation 14

Exercice 1 On considère $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. À quelle condition sur les $a_{i,j}$ la matrice A est-elle symétrique ? Et antisymétrique ?
2. À quelle condition sur les $a_{i,j}$ la matrice A est-elle triangulaire supérieure ? Cette condition étant satisfaite, à quelle condition A est-elle inversible, et quelle propriété possède son inverse ?

1. La matrice A est :
   — symétrique si : $\forall i, j \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j} = a_{j,i}$;
   — antisymétrique si : $\forall i, j \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j} = -a_{j,i}$;
2. Elle est triangulaire supérieure si : $\forall i, j \in [\![1;n]\!],\ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$. Et elle est alors inversible si tous les $a_{i,i}$ sont non nuls.

   La matrice A^{-1} est alors triangulaire supérieure aussi, et ses coefficients diagonaux sont les $\dfrac{1}{a_{i,i}}$.

Exercice 2 On considère $A = (2i - j) \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B = (i^j - 1) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

1. Expliciter les matrices A et B.
2. Dire si les produits AB et BA ont un sens, et les calculer le cas échéant.

1. On a directement :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$
2. Les deux produits AB et BA on un sens, et :
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 14 \\ 4 & 12 & 28 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 45 & 34 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Dire si la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, et si c'est le cas donner son inverse. On échelonne P par opérations sur les lignes :

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc elle est inversible} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

donc P est inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Rappeler, avec les hypothèses, la formule du binôme, et l'utiliser pour calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème : si A, B sont deux matrices carrées qui commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

On l'applique à l'écriture : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $B^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. Et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_2 + nB = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est aussi valable pour $n = 0$ (on a alors $A^0 = I_2$).

Et la formule est même valable pour $n \in \mathbb{Z}$, car pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

ce qui assure que $A^{-n} = (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.