Nom :

Interrogation 13

Exercice 1

1. Définir ce que veut dire "(u_n) et (v_n) sont adjacentes". Quel résultat a-t-on alors ?
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies ci-dessous sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles sont monotones de monotonies opposées, et que leur différence tend vers 0. Et alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   - $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$
   - $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2} < 0$
   - $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

   Et donc (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et leur différence tend vers 0 : elles sont adjacentes. Donc elles convergent vers une même limite (qui est $\dfrac{\pi^2}{6}$, mais ce n'est pas demandé, et pas immédiat...).

Exercice 2 Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$. Exprimer u_n en fonction de n.

On a une suite arithmético-géométrique. On résout :

$$x = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x = 2$$

donc $(v_n) = (u_n - 2)$ est géométrique, de raison $1/2$, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 4 - 2 = 2$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2}^n v_0 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

puis en revenant à $(u_n) = (v_n + 2)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + 2$$

et on note au passage que (u_n) est convergente (et tend vers 2).

Exercice 3 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. Exprimer u_n en fonction de n.

On a une suite linéaire récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique est $X^2 = 4X - 4$, qui possède comme unique solution $X = 2$. Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu)2^n$. Mais on a également :

— avec $n = 0$: $\mu = u_0 = 1$;

— avec $n = 1$: $2\lambda + 2\mu = u_1 = 2$ donc $\lambda = 0$.

Et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n.$$

Exercice 4 On considère (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2$.

1. Montrer que (u_n) et monotone, et donner sa monotonie en fonction de u_0.
2. Montrer que, si $u_0 \in \mathbb{R}$, alors (u_n) n'est pas nécessairement monotone.

1. On pose $f : x \mapsto x^2$. L'ensemble $\mathbb{R}_+$ est stable par f, et f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc (u_n) est monotone car définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$. La monotonie est donnée par le signe de $u_1 - u_0 = u_0^2 - u_0 = u_0(u_0 - 1)$ et donc :
   — si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$: (u_n) est constante ;
   — si $u_0 \in]0;1[$: (u_n) est strictement décroissante (et on peut montrer qu'elle tend vers 0) ;
   — si $u_0 > 1$: (u_n) est strictement croissante (et on peut montrer qu'elle tend vers $+\infty$).
2. Prenons $u_0 = -1/2$. Alors $u_1 = 1/4 > u_0$ donc (u_n) n'est pas décroissante.

   Mais on a alors $u_2 = 1/16 < u_1$ donc (u_n) n'est pas croissante.

   Et finalement (u_n) n'est pas monotone.

   Remarque : on peut se ramener au cas précédent en étudiant $(v_n) = (u_{n+1})$ qui est bien définie par $v_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = v_n^2$. Comme $v_0 \in]0;1[$, on déduit que (v_n) est strictement décroissante, c'est-à-dire que (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 1. Comme $u_0 < u_1$, on retrouve qu'elle n'est pas monotone.