Nom :

Interrogation 12

Exercice 1 équivalents

1. $a = 0$: $\dfrac{x^2\cos(x)}{\tan(x)+\sin(x)} \underset{a\to 0}{=} \dfrac{x^2\,(1+\mathrm{o}(1))}{x+\mathrm{o}(x)+x+\mathrm{o}(x)} \underset{a\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2x} \underset{a\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$

2. $a = 0$: $(e^{2x}-3)\ln(5+4x^2) \underset{a\to 0}{\sim} -2\ln(5)$

3. $a = +\infty$: $(e^{2x}-3)\ln(5+4x^2) \underset{a\to +\infty}{\sim} 2e^{2x}\ln(x)$

4. $a = +\infty$: $2x\ln(x) - e^{3x}\ln(x) + \sqrt{x}e^x \underset{a\to +\infty}{\sim} -e^{3x}\ln(x)$

Exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$:

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la définition de l'approximation décimale de x à 10^{-n}.
2. Soit $y > 0$. Donner la définition de la division euclidienne de x par y.
3. Soient $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $x \geq y$. Pour quelle(s) valeurs(s) l'écriture $x - y$ est-elle une forme indéterminée ? Montrer que, dans ce cas, on peut trouver une suite (u_n) et une suite (v_n) tendant vers x et y respectivement, telles que :
   (a) $u - v$ diverge sans avoir de limite ;
   (b) $u - v$ tend vers $+\infty$;
   (c) $u - v$ tend vers $-\infty$;
   (d) $u - v$ tend vers 37 ;

1. L'approximation décimale de x à 10^{-n} est : $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.
2. Il existe un unique entier $q \in \mathbb{Z}$ et un unique réel $r \in [0; y[$ tel que : $x = yq + r$. Cette écriture est la division euclidienne de x par y.
3. Les deux formes indéterminées sont pour $x = y = \pm\infty$. Pour une limite de $+\infty$, les suites suivantes conviennent aux cas demandés :
   (a) $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = n$
   (b) $u_n = n^2$ et $v_n = n$
   (c) $u_n = n$ et $v_n = n^2$
   (d) $u_n = n + 37$ et $v_n = n$

Exercice 3 Soit u une suite réelle.

1. Donner la définition de (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.
2. Donner la définition de (u_n) tend vers $+\infty$.
3. On suppose que u converge vers 0. À quelle condition la suite $(1/u)$ a-t-elle une limite ? Quelle est alors sa limite ?
4. Montrer, avec la définition, que :
   (a) si (u_n) est constante, alors (u_n) converge ;
   (b) si $(u_n) = (n^2)$, alors elle tend vers $+\infty$.

1. La suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

2. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A.$$

3. Il faut que u soit de signe constant (éventuellement à partir d'un certain rang). La suite $(1/u)$ tend alors vers $+\infty$ si u est positive, et $-\infty$ si elle est négative.
4. (a) Soit (u_n) constante. Notons a sa valeur constante. Montrons que (u_n) converge vers a.

   Soit $\varepsilon > 0$. Posons $n_0 = 37$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, on a :

$$|u_n - a| = |a - a| = 0 \leq \varepsilon$$

   donc $n_0 = 37$ convient pour la définition.

   Et (u_n) converge (vers a).

   (b) Soit $(u_n) = (n^2)$.

   Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons $n_0 = \lfloor \sqrt{|A|} \rfloor + 37$. Alors $n_0 \geq \sqrt{|A|}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Par (stricte) croissante de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$n \geq n_0 \Rightarrow n^2 \geq n_0^2 \geq |A| \geq A \Rightarrow u_n \geq A$$

   donc n_0 convient pour la définition.

   Et (u_n) tend vers $+\infty$.