Nom :

Interrogation 11

Exercice 1 Donner un équivalent en a des quantités suivantes :

1. $a = 0$: $\dfrac{x\tan(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{1} \underset{x \to 0}{\sim} x^2$

2. $a = 0$: $(2x^2 + 5x + 3)\ln(2 + x) \underset{x \to 0}{\sim} 3\ln(2)$

3. $a = +\infty$: $(2x^2 + 5x + 3)\ln(2 + x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2x^2\ln(x)$

4. $a = +\infty$: $\dfrac{xe^x + x^5\ln(x) - e^x\ln(x)}{x^3 + \ln(x)e^x - \sqrt{x}\ln(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{xe^x}{\ln(x)e^x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}$

Exercice 2 Soit $f : E \to F$.

1. Donner la définition de f injective, surjective ou bijective.
2. Pour $A \subset E$, donner le nom et la définition de $f(A)$. Dire si c'est un sous ensemble de E ou F et caractériser simplement le fait que $y \in f(A)$.
3. Pour $B \subset F$, donner le nom et la définition de $f^{-1}(B)$. Dire si c'est un sous ensemble de E ou F et caractériser simplement le fait que $x \in f^{-1}(B)$.

1. L'application f est :
   — injective : si tout élément de F possède au plus un antécédent par f ;
   — surjective : si tout élément de F possède au moins un antécédent par f ;
   — bijective : si tout élément de F possède exactement un antécédent par f.
2. L'image directe de A par f est : $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$. C'est un sous-ensemble de F caractérisé par : $\forall y \in F,\ y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ y = f(x)$.
3. L'image réciproque de B par f est : $f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}$. C'est un sous-ensemble de E caractérisé par : $\forall x \in E,\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Exercice 3 soit A partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Donner la définition de la borne supérieure de A. À quelle condition A en possède une (finie) ?
2. Donner la définition d'un maximum de A.
3. Si A possède une borne supérieure, possède-t-il un maximum ?
4. Si A possède un maximum, possède-t-il une borne supérieure ?

1. La borne supérieure de A est le plus petit majorant de A (ou $+\infty$ si A n'est pas majorée). Elle existe si, et seulement si, A est majorée (étant supposée non vide) par théorème de la borne supérieure.
2. Un maximum de A est un élément de A qui est un majorant de A, c'est-à-dire un M tel que :
$$M \in A \text{ et } \forall a \in A,\ a \leq M.$$
3. Si A possède une borne supérieure, A n'a pas nécessairement un maximum : contre-exemple avec $A = [0;1[$.
4. Si A possède un maximum, alors A possède une borne supérieure et $\max(A) = \sup(A)$ dans ce cas.

Exercice 4 Soient A, B, C trois sous-ensembles de E :

1. Donner la définition de $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$.
2. Écrire autrement les ensembles $A \cap \overline{(B \cap C)}$ et $A \cup \overline{(B \cup C)}$.
3. Donner la définition d'une partition de E, et donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $(A, \overline{A})$ soit une partition de E.

1. On a les définitions :
   — $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E à la fois dans A et dans B.
   — $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E dans A ou dans B ;
   — $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de E dans A mais pas dans B.
2. Par loi de de Morgan et ditributivité on a :
   — $A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \overline{C}\right)$
   — $A \cup \overline{(B \cup C)} = A \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(A \cup \overline{C}\right)$
3. Une partition est une famille d'ensembles non vides, deux-à-deux disjoints, dont l'union fait E (un recouvrement).

   La condition est que A ne soit ni égal à E, ni à $\emptyset$. En effet :
   — si $A = \emptyset$: alors $(A, \overline{A})$ contient l'ensemble vide, donc n'est pas une partition ;
   — si $A = E$: alors $\overline{E} = \emptyset$ donc même constat ;
   — sinon :
     — ni A ni $\overline{A}$ ne sont vides ;
     — $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (ils sont disjoints) ;
     — $A \cup \overline{A} = E$ (ils forment un recouvrement)

   Donc on a bien une partition.