

Nom :

Interrogation 1

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère l'assertion suivante :

$$(\exists k \in \mathbb{Z}, a \times b = 2k) \Rightarrow ((\exists m \in \mathbb{Z}, a = 2m) \text{ ou } (\exists n \in \mathbb{Z}, b = 2n))$$

1. Écrire en français cette assertion.
2. Écrire en symboles mathématiques sa négation.
3. Écrire en symboles mathématiques sa contraposée.
4. Écrire en français sa contraposée.
5. Prouver l'assertion de départ.

Exercice 2

1. Soit $n \geq 3$. Montrer que $2n^2 \geq (n + 1)^2$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 5$: $2^n > n^2$.

Exercice 3 Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et le prouver :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| \geq y \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$

Exercice 4 1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. En déduire que, si $a, b \in \mathbb{Z}$ vérifient $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
3. En déduire que, si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ vérifient $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, alors $a = c$ et $b = d$.