Lycée Champollion, PCSI-1-2-3, 2023–2024.
Proposition de corrigé

Exercice 1

(1) Par définition, pour $x \in I$:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right)$$

$x \mapsto \cos x$ est dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est aussi dérivable sur I. Par produit, $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\cos x)$ est donc dérivable sur I, et f est sa composée par exp, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$; donc f est dérivable sur I par composée.

Par composée, la dérivée de $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est $x \mapsto -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$. Par produit, la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\cos x)$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x)) - \frac{1}{x}\tan(x)$.

Et finalement par composée :

$$f' : x \mapsto -\frac{\ln(\cos(x)) + x\tan(x)}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos(x))\right).$$

(2) En effectuant le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 2 en 0 :

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

Et puisque $\ln(1+u) \underset{x\to 0}{=} u + o(u)$ et que $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) = \exp\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right)$$

Enfin, avec le développement limité de l'exponentielle en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

(3) f admet donc une limite finie valant 1 en 0 ; on peut donc prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$.

(4) La question 2 montre que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2

(1) Bérénice ne lance qu'une seule fois sa pièce. Elle peut donc faire pile une ou aucune fois. Il en est de même pour Alceste.

Ainsi, Alceste remporte la manche dans cette configuration si, et seulement si, elle fait pile une fois et Bérénice aucune fois, c'est-à-dire que sa pièce tombe sur pile, et que la pièce de Bérénice tombe sur face. En notant P_A et F_B ces événements, on a donc :

$$\alpha = \mathbb{P}(P_A \cap F_B)$$

et par indépendance des lancers, on a donc :

$$\alpha = \mathbb{P}(P_A) \cdot \mathbb{P}(F_B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(2) Bérénice lance deux fois sa pièce. Elle peut donc faire pile deux, une ou aucune fois. En revanche, Alceste peut seulement faire pile une ou aucune fois.

À nouveau, Alceste remporte la manche dans cette configuration si, et seulement si, elle fait pile une fois et Bérénice aucune fois, c'est-à-dire que sa pièce tombe sur pile, et que la pièce de Bérénice tombe deux fois sur face. De même que ci-dessus, on obtient par indépendance des lancers :

$$\beta = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons la probabilité de A_{n+1} par formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$. On a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= a_n \cdot \beta + (1 - a_n)\alpha \\ &= \frac{2}{9}a_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}a_n \\ &= -\frac{1}{9}a_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule demandée.

(4) Comme lors de la première manche Bérénice ne lance qu'une seule fois sa pièce, on a directement : $a_1 = \alpha = \frac{1}{3}$.

Par la relation de récurrence précédente, on déduit : $a_2 = -\frac{1}{9}a_1 + \frac{1}{3} = \frac{8}{27}$.

Et on a déjà calculé $\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \beta = \frac{2}{9}$.

Par formule de Bayes, on a donc :

$$\mathbb{P}_{A_2}(A_1) = \frac{\mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{\beta a_1}{a_2} = \frac{\frac{2}{9} \times \frac{1}{3}}{\frac{8}{27}} = \frac{1}{8}.$$

(5) La suite (a_n) est donc arithmético-géométrique. L'unique solution de $x = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$ est $\ell = \frac{3}{10}$; posons $u_n = a_n - \ell$. On a alors, pour tout $n \geq 1$: $u_{n+1} = a_{n+1} - \ell = \left(-\frac{1}{9}a_n + \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{9}\ell + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9}u_n$. Donc (u_n) est géométrique ; on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} u_1$$

d'où

$$a_n = u_n + \ell = \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right) + \frac{3}{10} = \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} \times \frac{1}{30} + \frac{3}{10}$$

Par limite d'une puissance de raison dans $]-1, 1[$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{10}$.

Problème

Dans ce problème, on s'intéresse à deux modèles d'évolution de population. Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : le modèle logistique discret

Sous-partie 1.1 : le cas $0 < a \leq 1$

(1) La fonction f_a est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$, et pour $x \in [0,1]$,
$$f'_a(x) = a(1-2x)$$
Ainsi, $f'_a(x) > 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[0,1/2]$, strictement décroissante sur $[1/2,1]$, avec $f(0) = f(1) = 0$ et $f(1/2) = a/4$.

(2) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
— C'est une donnée de l'énoncé pour $n = 0$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $v_n \in [0,1]$. Alors $v_{n+1} = f_a(v_n) \in [0,a/4]$ d'après le tableau de variations précédents. Mais $\dfrac{a}{4} \leq 1$, donc $v_{n+1} \in [0,1]$.
— D'où la conclusion par axiome de récurrence.

(3) Soit $x \in [0,1]$. On a $f_a(x) = x \iff ax(1-x) - x = 0 \iff x(a-1-ax) = 0$. Mais l'équation $a-1-ax = 0$ conduit à $x = 1 - \dfrac{1}{a} \leq 0$ (car $a \in]0,1]$). Donc $f_a(x) = x \iff x = 0$. Ainsi, 0 est l'unique point fixe de f_a sur $[0,1]$.

(4) La suite (v_n) étant bornée d'après la question 2, elle ne peut tendre vers une limite infinie. Si (v_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors d'une part $v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$, et d'autre part $v_{n+1} = f_a(v_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f_a(\ell)$ par continuité de la fonction f_a. Par unicité de la limite, on a bien $f_a(\ell) = \ell$.

(5) On a $g_a(x) = x(a-1-ax)$ qui est du signe de $a-1-ax$ sur $]0,1[$. Or, $a-1-ax \geq 0 \iff x \leq 1 - \dfrac{1}{a}$. Cette dernière proposition est fausse puisque $1 - \dfrac{1}{a} \leq 0$ comme on l'a déjà vu, donc $g_a(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

(6) D'après la question 2, on a $v_n \in [0,1]$ pour tout n. Donc, d'après la question précédente, $v_{n+1} - v_n = g_a(v_n) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(7) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel $\ell \in [0,1]$. D'après la question 3, ℓ est un point fixe de f_a. Puisque 0 est l'unique point fixe de f_a sur $[0,1]$, (v_n) converge donc vers 0.
Cela signifie donc que le modèle prédit l'extinction de la population avec le temps !

Sous-partie 1.2 : le cas $a = \dfrac{5}{2}$

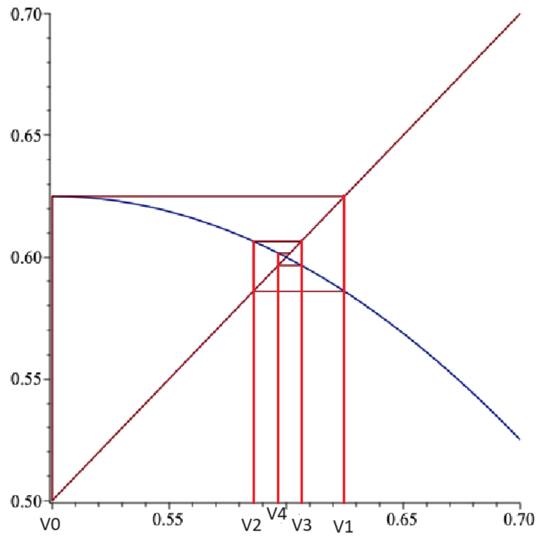
(8) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = x \iff g(x) = 0 \iff x\left(\dfrac{5}{2}(1-x) - 1\right) = 0 \iff x = 0$ ou $\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}x = 0$. f a donc deux points fixes, qui sont bien dans $[0,1]$: 0 et $3/5$.

(9)

(10) On calcule :
$$h(x) = f \circ f(x) - x = \frac{5}{2}\left(f(x)(1-f(x))\right) - x = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}(x(1-x))\right)\left(1 - \frac{5}{2}x(1-x)\right) - x$$
d'où
$$h(x) = \frac{x}{8}\left(25(1-x)(2-5x+5x^2) - 8\right) = \frac{2}{8}(25(-5x^3+10x^2-7x+2) - 8)$$
Or $(5x-3)(25x^2-35x+14) = 25(5x^3-10x^2+7x-2) + 8$, d'où le résultat.

(11) Les points fixes de $f \circ f$ sont les solutions de l'équation $h(x) = 0$, à savoir $0, 3/5$ et les racines du trinôme $25x^2 - 35x + 14$. Mais ce dernier trinôme a un discriminant qui vaut $-175 < 0$, donc n'a pas de racines réelles. Les points fixes de f et $f \circ f$ sur $[0,1]$ sont donc bien les mêmes.

(12) Le trinôme du second degré prend des valeurs positives sur $[0,1]$, x également ; le signe est donc celui de $-(5x-3)$, et donc h est positive sur $[0,3/5]$.



(13) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{2n} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ par stabilité puisque $v_0 \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, et

$$v_{2(n+1)} - v_n = f \circ f(v_{2n}) - v_{2n} = h(v_{2n}) \geq 0$$

d'après la question précédente. La suite (v_{2n}) est donc bien croissante.

(14) La suite (v_{2n}) est croissante et majorée par 1 donc converge vers une limite ℓ, qui est un point fixe de $f \circ f$ par continuité de cette dernière fonction. D'après les questions précédentes, elle converge donc vers 0 ou vers 3/5, mais puisque $v_0 > 0$, elle ne peut converger que vers 3/5.

(15) Puisque $v_{2n+1} = f(v_{2n})$, par continuité de f et convergence (v_{2n}) vers 3/5, on obtient la convergence de (v_{2n+1}) vers $f(3/5) = 3/5$.

Les deux sous-suites d'indices pairs et impairs convergeant vers la **même** limite, c'est aussi le cas de (v_n).

(16) Puisque $u_n = \dfrac{v_n}{M}$, le modèle prédit donc la convergence de la taille de la population vers la valeur limite $\dfrac{3}{5}M$.

Le modèle logistique continu

(17) (a) On décompose en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X(M-X)}$$

qui est à pôles simples : 0 et M. D'après le cours et les méthodes usuelles de décomposition, on trouve donc que $\alpha = \dfrac{1}{M}$ et $\beta = -\dfrac{1}{M}$ conviennent.

Puisque $0 < y(t) < M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\frac{y'(t)}{y(t)(M-y(t))} - a = 0$$

et en appliquant la relation obtenue au réel $z = y(t) \in]0, M[$, on obtient bien :

$$0 = y'(t)\left(\alpha\frac{1}{y(t)} + \beta\frac{1}{y(t)-M}\right) - a = \alpha\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\frac{y'(t)}{y(t)-M} - a$$

(b) Par positivité stricte de $y(t)$ et $M - y(t)$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction

$$g : t \mapsto \alpha \ln(y(t)) + \beta \ln(M - y(t)) - at$$

est une primitive de Ψ sur $\mathbb{R}_+$.

(18) D'après la question 17.a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $g'(t) = \Psi(t) = 0$. La fonction g est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, donc g est constante sur $\mathbb{R}_+$. Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{M} \ln\left(\frac{y(t)}{M - y(t)}\right) - at = \lambda$$

donc

$$\ln\left(\frac{y(t)}{M - y(t)}\right) = aMt + \lambda M$$

En composant par l'exponentielle, on obtient donc

$$\frac{y(t)}{M - y(t)} = e^{\lambda M} e^{aMt}$$

Et en posant $c = e^{\lambda M} > 0$, on a donc

$$y(t) = ce^{aMt}(M - y(t))$$

et en résolvant cette équation du premier degré en $y(t)$:

$$y(t) = \frac{cMe^{aMt}}{1 + ce^{aMt}}$$

(19) On a l'équivalent $y(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{cMe^{aMt}}{ce^{aMt}} = M$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = M$.

(20) D'après la question précédente, le modèle prédit une convergence vers la taille maximale M en temps long.