Lycée Champollion, PCSI-1-2-3, 2023–2024.
Samedi 4 Mai 2024
Durée : 4 heures.

Instructions générales :
Aucun document n'est autorisé.
L'emploi d'une calculatrice est interdit.
Dans chaque question, les résultats demandés seront $\boxed{\textbf{encadrés}}$, les étapes des méthodes mises en oeuvre et les résultats intermédiaires seront mis en évidence par un **surlignement**, une ligne sautée ou tout autre moyen de votre choix.
Vous êtes enfin invités à porter une attention particulière à la rédaction et à l'orthographe : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Ce DS sera IMPERATIVEMENT rendu sur 3 copies séparées :

- sur la COPIE 1 : exercice 1 ;
- sur la COPIE 2 : exercice 2 ;
- sur la COPIE 3 : Problème.

Barème indicatif sur points (donnant une idée du temps respectif qu'il est bon de consacrer à chaque exercice).
Exercice 1 : 9 points ;
Exercice 2 : 11 points ;
Problème : 34 points.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, définie sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

(1) Justifier que f est dérivable sur I et donner l'expression de sa dérivée.

(2) Déterminer le développement limité en 0 de f à l'ordre 1.

(3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On précisera la valeur du prolongement en 0, et on notera encore f l'application ainsi prolongée.

(4) Ce prolongement f est-il dérivable en 0 ? Si oui, on précisera la valeur de $f'(0)$.

Exercice 2

Alceste et Bérénice décident de jouer à un jeu, organisé par manches successives. Elles disposent chacune d'une pièce :

— Alceste dispose d'une pièce équilibrée, qu'elle lancera une fois à chaque manche ;
— Bérénice dispose d'une pièce truquée, tombant sur pile avec une probabilité 1/3, qu'elle lancera une ou deux fois selon le résultat de la manche précédente.

Les lancers d'Alceste et de Bérénice se font tous indépendamment les uns des autres.
Alceste remporte une manche si elle fait **strictement** plus de pile que Bérénice. Et sinon c'est Bérénice qui remporte la manche.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "Alceste remporte la n-ème manche" et on note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

(1) Calculer la probabilité α pour Alceste de remporter une manche si Bérénice ne lance qu'une fois sa pièce.

(2) Calculer la probabilité β pour Alceste de remporter une manche si Bérénice lance deux fois sa pièce.

Les manches s'organisent successivement ainsi :
- lors de la première manche, Bérénice ne lance qu'une fois sa pièce ;
- si la n-ème manche est remportée par Bérénice, celle-ci ne lancera qu'une fois sa pièce à la manche suivante ; sinon elle la lancera deux fois.

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} = -\dfrac{1}{9}a_n + \dfrac{1}{3}$.

(4) On suppose que Alceste a remporté la deuxième manche. Quelle est la probabilité qu'elle ait remporté la première ?

(5) Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de a_n en fonction de n et la limite éventuelle de la suite (a_n).

Problème

Dans ce problème, on s'intéresse à deux modèles d'évolution de population. Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : le modèle logistique discret

Dans cette partie, on modélise la taille de la population par une suite (u_n) où n est un entier naturel qui désigne le temps écoulé depuis un instant donné pris pour origine.
On suppose que la taille de la population est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n < M$$

Dans toute cette partie, on suppose $0 < u_0 < M$, et on pose $v_n = \dfrac{u_n}{M}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On a alors $v_0 \in]0,1[$. On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = av_n(1 - v_n)$$

Le but de cette partie est d'étudier le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $0 < a \leq 1$ et de faire une étude numérique lorsque $a = \dfrac{5}{2}$.

Sous-partie 1.1 : le cas $0 < a \leq 1$

On considère les fonctions f_a et g_a définies sur $[0, 1]$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_a(x) = ax(1 - x) \quad \text{et} \quad g_a(x) = f_a(x) - x$$

(1) Dresser le tableau des variations de f_a sur $[0, 1]$.

(2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, 1]$.

(3) Déterminer tous les points fixes de f_a, c'est-à-dire tous les éléments x de $[0; 1]$ tels que $f_a(x) = x$..

(4) En déduire toutes les limites possibles, finies ou non, pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], g_a(x) \leq 0$.

(6) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

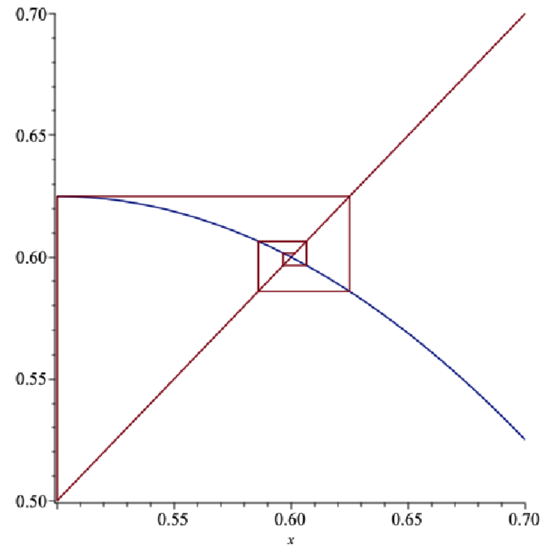
(7) Justifier la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel que l'on déterminera. Que prédit le modèle sur l'évolution de la taille de la population dans ce cas ?

Sous-partie 1.2 : le cas $a = \dfrac{5}{2}$

On pose $v_0 = \dfrac{1}{2}$. On introduit les fonctions f, g et h définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \frac{5}{2}x(1 - x), \quad g(x) = f(x) - x, \quad h(x) = f \circ f(x) - x$$

(8) Démontrer que f admet sur $[0, 1]$ exactement deux points fixes que l'on explicitera.



(9) On a représenté sur le graphique ci-dessus, dans un repère orthonormé, pour des abscisses comprises entre $0,5$ et $0,7$:
— la courbe représentative de la fonction f ;
— la droite d'équation $y = x$.
Reproduire sur votre copie le graphique en mettant en évidence les nombres v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 sur l'axe des abscisses.

(10) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad h(x) = -\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}$$

(11) En déduire que les fonctions f et $f \circ f$ ont les mêmes points fixes sur $[0,1]$.

(12) Étudier le signe de h sur $\left[0, \frac{3}{5}\right]$.

(13) On admet que l'intervalle $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ est stable par la fonction $f \circ f$. Déduire de la question précédente que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(14) Montrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(15) En déduire que la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

(16) Conclure sur le comportement asymptotique de la taille de la population prédit par le modèle.

Le modèle logistique continu

Dans cette partie, on modélise l'évolution de la population par une fonction. La taille de la population à l'instant t est représentée par le réel $y(t)$, où y désigne une fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+^*$.
On suppose que la taille de la population est bornée par un réel strictement positif M, c'est-à-dire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < y(t) < M$$

On suppose qu'il existe un réel strictement positif a tel que y soit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = ay(t)(M - y(t))$$

(17) (a) Démontrer qu'il existe des réels α, β que l'on déterminera tels que pour tout $z \in]0, M[$:

$$\frac{1}{z(M-z)} = \alpha\frac{1}{z} + \beta\frac{1}{z-M}$$

En déduire que y vérifie l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \frac{y'(t)}{y(t)} + \beta \frac{y'(t)}{y(t) - M} - a = 0$$

(b) Déterminer en fonction de a et de M une primitive de la fonction

$$\Psi : t \mapsto \alpha \frac{y'(t)}{y(t)} + \beta \frac{y'(t)}{y(t) - M} - a \quad \text{sur } \mathbb{R}_+$$

(18) Déduire de la question précédente qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$y(t) = \frac{cMe^{aMt}}{1 + ce^{aMt}}$$

(19) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} y(t)$.

(20) Qu'en déduire sur l'évolution de la population prédite par le modèle ?