Lycée Champollion, PCSI-1-2-3, 2023–2024.
Corrigé du DS commun du samedi 25 Mai 2024

Exercice

1. Le support de la variable aléatoire $W = (X, Y)$ est inclus dans $[\![1, n]\!]^2$.
Pour $i \in \{1, 2\}$, notons X_i la variable aléatoire donnant le numéro de la boule obtenue lors du i-ème tirage. On a alors que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

   Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

   - Si $i > j$, alors $\mathbb{P}(X = i \text{ et} Y = j) = 0$ car le maximum des numéros obtenu ne peut être plus petit que le minimum.
   - Pour $i = j$, on a
   $$\{X = i \text{ et} Y = i\} = \{X_1 = i \text{ et } X_2 = i\}.$$
   Or X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$, donc
   $$\mathbb{P}(X = i \text{ et} Y = i) = \mathbb{P}(X_1 = i)\,\mathbb{P}(X_2 = i) = \frac{1}{n^2}$$
   - Pour $i < j$, on a
   $$\{X = i \text{ et} Y = j\} = \{X_1 = i \text{ et } X_2 = j\} \cup \{X_1 = j \text{ et } X_2 = i\}$$
   Et de même, on obtient
   $$\mathbb{P}(X = i \text{ et} Y = j) = \mathbb{P}(X_1 = i)\,\mathbb{P}(X_2 = j) + \mathbb{P}(X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_2 = i) = \frac{2}{n^2}$$

   En résumé :

   $$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad p_{i,j} \overset{def}{=} \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \begin{cases} 0, & \text{si } i > j \\ 1/n^2, & \text{si } i = j \\ 2/n^2, & \text{si } i < j. \end{cases}}$$

   Il est clair que $p_{i,j} \geq 0$ pour toutes les valeurs de (i, j) et on calcule "sans peine" :
   $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   On a donc bien obtenu une distribution de probabilité.

2. Les supports des variables aléatoires X et Y sont inclus dans $[\![1, n]\!]$.

   (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En appliquant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événement associé à la variable aléatoire Y on a
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) \\ &= \frac{1}{n^2} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}(n - i) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1,\, n]\!], \quad \mathbb{P}(X=i) = \frac{2n+1-2i}{n^2}}$$

(b) De même, pour tout $j \in [\![1,\, n]\!]$, on trouve

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(Y=j) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=i \text{ et } Y=j) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n^2} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}(j-1) \end{array}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![1,\, n]\!], \quad \mathbb{P}(Y=j) = \frac{2j-1}{n^2}}$$

(c) Lorsque $n=1$, les variables aléatoires X et Y sont certaines (constantes et égales à 1 en l'occurrence) et donc X et Y sont alors indépendantes.

(d) Lorsque $n \geq 2$, on peut remarquer par exemple que $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{1}{n}$, $\mathbb{P}(Y=1) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{P}((X,Y)=(n,1)) = 0 \neq \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=1)$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Notons $Z = n+1-X$. On remarque que Z a le même support que X et Y car

$$X \in [\![1,\, n]\!] \iff -X \in [\![-n,\, -1]\!] \iff Z = n+1-X \in [\![1,\, n]\!]$$

Pour tout $j \in [\![1,\, n]\!]$, on a de plus

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(Z=i) & = & \mathbb{P}(X=n+1-j) \\ & = & \displaystyle\frac{2n+1-2\,(n+1-j)}{n^2} = \frac{2j-1}{n^2} \\ & = & \mathbb{P}(Y=j) \end{array}$$

Ainsi $Z \sim Y$.

4.

$$\begin{array}{rcl} E(X) & \overset{def}{=} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}(X=i) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n^2}\left((2n+1)\sum_{i=1}^{n} i - 2\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n^2}\left((2n+1)\frac{n(n+1)}{2} - 2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}$$

De plus $Z \sim Y$ et l'espérance est linéaire donc

$$E(Y) \;=\; E(Z) = E(n+1-X) = n+1-E(X)$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}$$

On est rassuré (allez savoir pourquoi) de constater que pour $n=1$ on obtient bien $E(X) = E(Y) = 1$ et plus généralement $E(X+Y) = n+1 = E(X_1+X_2)$ ...

Problème

Partie A : Exemples en dimension 3.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé.

   (a) <u>Première présentation :</u> On peut utiliser la méthode classique : pour $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, on résout l'équation $AX = Y$

$$AX = Y \iff \left\{ \begin{array}{llll} & -2x_1 & -2x_3 & = y_1 \\ -4x_1 & -4x_2 & -8x_3 & = y_2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = y_3 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{lllll} & -2x_1 & -2x_3 & = y_1 & \\ & & 0 & = y_2 + 2y_3 & L_2 + 2L_3 \\ 2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = y_3 & \end{array} \right.$$

   Le système est échelonné, et on en déduit que Y appartient à $\mathrm{Im}(f)$ si et seulement si l'équation de compatibilité $y_2 + 2y_3 = 0$ est vérifiée. Donc $\mathrm{Im}(f)$ est le plan d'équation cartésienne $y_2 + 2y_3 = 0$. Ainsi $rg(f) = 2$ et la famille des deux vecteurs non colinéaires $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ constitue alors une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   En prenant $Y = 0$ et en terminant la résolution du système, on trouve $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

   <u>Seconde présentation :</u> On pouvait aussi remarquer que $C_1 + C_2 - C_3 = 0$ et C_1, C_2 ne sont pas proportionnels donc $rg(f) = 2$ et d'après la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Ainsi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $(C_1, C_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   (b) La matrice $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -6 & -8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie que $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$ et C_1, C_2 ne sont pas proportionnels donc $rg(f - 2\mathrm{Id}) = 2$ et d'après la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})) = 1$. Donc

$$\boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}).}$$

   De même, la matrice $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -8 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ vérifie que $C_1 + 2C_2 - C_3 = 0$ et C_1, C_2 ne sont pas proportionnels, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})) = 1$ et

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}).}$$

(c) Notons $\mathcal{E}$ la base usuelle de $\mathbb{C}^3$.
On commence par montrer que $\underline{\mathcal{V} = (v_1,\, v_2,\, v_3) \text{ est un base de } \mathbb{C}^3}$, par exemple en calculant

$$\det_{\mathcal{E}}(v_1,\, v_2,\, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Ces vecteurs vérifient $f(v_1) = -2v_1$, $f(v_2) = 0_E$ et $f(v_3) = 2v_3$, d'où

$$\boxed{D = M_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2}$$

(d) On commence par montrer que $\mathcal{V}' = (v_1',\, v_2',\, v_3')$ est aussi une base de $\mathbb{C}^3$, par exemple en calculant

$$\det_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Ainsi $\underline{F_1 = \mathrm{Vect}(v_1',\, v_2') \text{ et } G_1 = \mathrm{Vect}(v_3') \text{ sont bien supplémentaires dans } \mathbb{C}^3.}$
f est linéaire, donc on calcule aisément

$$f(v_1') = -2v_1 + 2v_3 = -2\,v_3', \quad f(v_2') = 0_E, \quad f(v_3') = -2v_1 - 2v_3 = -2v_1'$$

et on en déduit

$$f(F_1) = \mathrm{Vect}(f(v_1'),\, f(v_2')) = \mathrm{Vect}(v_3') = G_1 \quad \text{et} \quad f(G_1) = \mathrm{Vect}(f'(v_3)) = \mathrm{Vect}(v_1') \subset F_1$$

Donc $\underline{f \text{ est bien échangeur.}}$

2. (a)
- $\mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2) \subset \mathcal{L}(E)$.
- Notons f_0 l'endomorphisme nul de E. On a $f_0(F_2) = \{0_E\} \subset G_2$ et $f_0(G_2) = \{0_E\} \subset F_2$ donc $f_0 \in \mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2)$.

- Soient $f, g \in \mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $h = f + \lambda\, g$.
Pour tout $x \in F_2$, on a alors $f(x) \in G_2$ et $g(x) \in G_2$ donc $h(x) = f(x) + \lambda\, g(x) \in G_2$ car G_2 est un espace vectoriel. Ainsi $h(F_2) \subset G_2$.
De même $h(G_2) \subset F_2$. D'où $h \in \mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2)$.

Donc $\underline{\mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E).}$

(b) $\underline{\mathcal{W} = (w_1,\, w_2,\, w_3) \text{ est une base de } E}$ car c'est la réunion des bases de deux s.e.v. supplémentaires de E. De plus, u est linéaire et $F_2 = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$, $G_2 = \mathrm{Vect}(w_3)$ donc

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2) &\iff u(w_1) \in G_2, \quad u(w_2) \in G_2, \quad u(w_3) \in F_2 \\ &\iff \exists \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta \in \mathbb{C}\ ;\ u(w_1) = \gamma w_3,\ u(w_2) = \delta w_3,\ u(w_3) = \alpha w_1 + \beta w_2 \\ &\iff \exists \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta \in \mathbb{C}\ ;\ M_{\mathcal{W}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & \delta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{u \in \mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2) \iff M_{\mathcal{W}}(u) \in \mathcal{K}.}$

(c) Notons $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ la base usuelle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
La famille $\mathcal{Z} = \Big(E_{3,1},\, E_{3,2},\, E_{1,3},\, E_{2,3}\Big)$ est libre car c'est une partie de la base usuelle. De plus $\mathcal{Z}$ engendre $\mathcal{K}$. Donc $\mathcal{Z}$ est une base de $\mathcal{K}$ et $\dim(\mathcal{K}) = \mathrm{card}(\mathcal{Z}) = 4$.
L'application de représentation matricielle $M_{\mathcal{W}} : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto M_{\mathcal{W}}(u) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est un isomorphisme et d'après la question précédente $M_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2)\right) = \mathcal{K}$, donc

$$\boxed{\dim\left(\mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2)\right) = \dim(\mathcal{K}) = 4}$$

Partie B : les endomorphismes nilpotents sont échangeurs

3. Soient $(\lambda_k)_{0\leq k\leq p-1} \in \mathbb{C}^p$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k\, f^k(x_0) = 0_E$.

   Supposons que les λ_k ne soient pas tous nuls, et notons $j = \min\left\{k \in [\![0,\, p-1]\!] \text{ tel que} \lambda_k \neq 0\right\}$ de sorte que la relation précédente se réécrive $\displaystyle\sum_{k=j}^{p-1} \lambda_k\, f^k(x_0) = 0_E$.

   En composant par l'application linéaire f^{p-1-j} et en utilisant que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour $k \geq p$, on obtient :
   $$\lambda_j\, f^{p-1}(x_0) = 0_E$$
   Comme $\lambda_j \neq 0$ et $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, on a une contradiction. Ainsi notre supposition était fausse et donc
   $$\boxed{\text{la famille } \mathcal{L} = \left(f^k(x_0)\right)_{0\leq k\leq p-1} \text{ est libre.}}$$
   Comme pour toute famille libre, d'après le théorème de la base incomplète, il s'ensuit que
   $$\boxed{p = \mathrm{card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E) = n}$$

4. Dans cette question, on suppose que $p = n$.

   (a) La famille $\mathcal{L}$ est libre et $\mathrm{card}(\mathcal{L}) = n = \dim(E)$ donc $\mathcal{L}$ est une base de E. Pour tout $j \in [\![1,\, n-1]\!]$, on a $f\left(f^{j-1}(x_0)\right) = f^j(x_0)$ et $f\left(f^{n-1}(x_0)\right) = f^n(x_0) = 0_E$ donc la matrice de f dans cette base est :
   $$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

   (b) On remarque :

   - Tout entier étant soit pair, soit impair, on voit que la réunion des familles génératrices de E_0 et E_1 constitue la base $\mathcal{L}$ de E. Donc $\boxed{E = E_0 \oplus E_1}$.
   - f est linéaire donc $f(E_0) = \mathrm{Vect}\left(f^{2k+1}(x_0)\right)_{1\leq 2k+1\leq n} = \mathrm{Vect}\left(f^{2k+1}(x_0)\right)_{1\leq 2k+1\leq n-1}$ car $f^n(x_0) = 0_E$. Donc $\boxed{f(E_0) = E_1}$.
   - De même $f(E_1) = \mathrm{Vect}\left(f^{2k+2}(x_0)\right)_{2\leq 2k+2\leq n} = \mathrm{Vect}\left(f^{2j}(x_0)\right)_{2\leq 2j\leq n-1}$. Donc $\boxed{f(E_1) \subset E_0}$.

   En conclusion : $\underline{f \text{ est échangeur.}}$

5. Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et $p = 2$.

   (a) $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc pour tout $x \in E$, on a $f(f(x)) = 0_E$ et donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi
   $$\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \text{ et donc } rg(f) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right)}$$
   Or $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $rg(f) \geq 1$ et d'après la formule du rang, on sait que $rg(f) + \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = 3$. Il n'y a donc pas le choix :
   $$\boxed{rg(f) = 1 \quad \text{et} \quad \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = 2}$$

(b) $f(x_0) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $f(x_0) \neq 0_E$ donc $(f(x_0))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut trouver un vecteur $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $\Big(f(x_0),\, x_1\Big)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
La famille $\Big(f(x_0),\, x_1\Big)$ est libre et $x_0 \notin \mathrm{Vect}\Big(f(x_0),\, x_1\Big) = \mathrm{Ker}(f)$ donc d'après le théorème de "la famille libre élargie", il s'ensuit que la famille $\mathcal{B} = \Big(x_0,\, f(x_0),\, x_1\Big)$ est libre. De plus $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(E)$, donc

$$\boxed{\mathcal{B} = \Big(x_0,\, f(x_0),\, x_1\Big) \text{ est une base de } E.}$$

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1}}$$

(c) Prenons $E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_0),\, x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(x_0)$. D'après ce qui précède, on a $E = E_0 \oplus E_1$ et $f(E_0) = \{0_E\} \subset E_1$ et $f(E_1) = \mathrm{Vect}\,(f(x_0)) \subset E_0$. Donc f est échangeur.

6. $J^2 = E_{1,3}$, $J^3 = 0_{3,3}$ et de même $K^2 = 0_{3,3}$ donc f et g sont nilpotents et par conséquent échangeurs.
$\det(h) = \det(J+K) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$ donc l'endomorphisme $h = f + g$ est bijectif.
Supposons que h est échangeur, c'est-à-dire qu'il existe deux s.e.v. F et G de $\mathbb{C}^3$ tels que $\mathbb{C}^3 = F \oplus G$ et $h(F) \subset G$ et $h(G) \subset F$.
Les isomorphismes préservent les dimensions, donc on devrait avoir

$$\dim(G) = \dim((h(G))) \leq \dim(F) \quad \text{et} \quad \dim(F) = \dim(h(F)) \leq \dim(G)$$

d'où $\dim(F) = \dim(G)$. Mais on a aussi $\dim(F) + \dim(G) = 3$, puisque $E = F \oplus G$,. Ce qui aboutit à $2\,\dim(F) = 3$. Il y a un clairement un problème de parité !
Donc $\mathcal{E}ch(\mathbb{C}^3)$ n'est pas stable par addition, ce n'est donc pas un espace vectoriel.

Partie C : La condition $(C1)$ implique $(C2)$ et $(C3)$.

7. Pour tout $x \in E$, on a $p_F(x) \in F$ et donc $a(x) = u\,(p_F(x)) \in G$. Il s'ensuit que $p_F(a(x)) = 0_E$ et $p_G(a(x)) = a(x)$. D'où

$$\boxed{p_F \circ a = 0_{\mathcal{L}(E)}, \quad p_G \circ a = a \quad \text{et de même} \quad p_F \circ b = b, \quad p_G \circ b = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

8. p_F et p_G sont des projecteurs associés donc $p_F + p_G = \mathrm{Id}_E$. De plus u est linéaire donc :

$$a + b = u \circ p_F + u \circ p_G = u \circ (p_F + p_G) = u \circ \mathrm{Id}_E = u$$

De plus par associativité de la composition, on a

$$a^2 = u \circ p_F \circ a = u \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et de même} \quad b^2 = u \circ p_G \circ b = u \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

On obtient donc $u = a + b$ avec $a^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $b^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
On voit ainsi que tout endomorphisme échangeur vérifie $(C2)$.

9. s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G donc s est bijective et $s^{-1} = s$.

$$\begin{aligned} s \circ u \circ s &= p_F \circ u \circ p_F - p_G \circ u \circ p_F - p_F \circ u \circ p_G + p_G \circ u \circ p_G \\ &= p_F \circ a - p_G \circ a - p_F \circ b + p_G \circ b \\ &= 0_{\mathcal{L}(E)} - a - b + 0_{\mathcal{L}(E)} \\ &= -u \end{aligned}$$

On voit ainsi que tout endomorphisme échangeur vérifie $(C3)$.

Partie D : La condition (C_2) implique la condition (C_1) : cas d'un automorphisme.

Dans cette partie, u désigne un **automorphisme** d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

10. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
    Pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors $f(y) = f^2(x) = 0_E$ et donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et donc $rg(f) \leq \dim\Big(\mathrm{Ker} f\Big)$.
    D'après la formule du rang, on a alors
    $$n \;=\; rg(f) + \dim\Big(\mathrm{Ker} f\Big) \leq 2\,\dim\Big(\mathrm{Ker} f\Big)$$

11. Soit $x \in \mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(b)$. On a alors $u(x) = a(x) + b(x) = 0_E$. Or u est bijective et donc $x = 0_E$. Ainsi :
    $$\boxed{\mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(b) = \{0_E\}}$$
    On en déduit que
    $$\dim\Big(\mathrm{Ker}(a)\Big) + \dim\Big(\mathrm{Ker}(b)\Big) = \dim\Big(\mathrm{Ker}(a) + \mathrm{Ker}(b)\Big) \leq \dim(E) = n$$
    Or, d'après la question précédente on a $\dim\Big(\mathrm{Ker}(a)\Big) \geq \dfrac{n}{2}$ et $\dim\Big(\mathrm{Ker}(b)\Big) \geq \dfrac{n}{2}$. On a donc nécessairement
    $$\boxed{\dim\Big(\mathrm{Ker} a\Big) = \dim\Big(\mathrm{Ker} b\Big) = \frac{n}{2}}$$
    Ainsi $\dim\Big(\mathrm{Ker}(a)\Big) + \dim\Big(\mathrm{Ker}(b)\Big) = n$ et $\mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(b) = \{0_E\}$, d'où
    $$\boxed{E = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)}$$
    D'après la formule du rang, on a aussi $rg(a) = n - \dim\Big(\mathrm{Ker} a\Big) = \dfrac{n}{2}$ et $rg(b) = n - \dim\Big(\mathrm{Ker} b\Big) = \dfrac{n}{2}$.
    On a donc $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Ker}(a)$ et $\dim\Big(\mathrm{Ker} a\Big) = rg(a)$, d'où
    $$\boxed{\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Ker}(a) \quad \text{et de même} \quad \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Ker}(b)}$$

12. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(a)$, on a $u(x) = a(x) + b(x) = b(x) \in \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Ker}(b)$. Ainsi
    $$u(\mathrm{Ker}(a)) \subset \mathrm{Ker}(b) \quad \text{et de même} \quad u(\mathrm{Ker}(b)) \subset \mathrm{Ker}(a)$$
    Comme $E = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)$, cela implique que u est échangeur.

Partie E : Intermède ; un principe de décomposition.

On se donne dans cette partie un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E.

13. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$, on a $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
    Ainsi $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
    $\boxed{\text{La suite } \Big(\mathrm{Ker}(f^k)\Big)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est donc croissante pour l'inclusion.}}$
    Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Im}(f^{k+1}) = f^{k+1}(E) = f^k(f(E)) =\subset f^k(E) = \mathrm{Im}(f^k)$, car $f(E) \subset E$.
    $\boxed{\text{La suite } \Big(\mathrm{Im}(f^k)\Big)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante pour l'inclusion.}}$

14. La suite des dimensions $\left(\dim\left(\mathrm{Ker}(f^k)\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (les entiers compris entre 0 et n), donc cette suite est stationnaire :

$$\exists p \in \mathbb{N}\ ; \quad \forall k \geq p, \quad \dim\left(\mathrm{Ker}(f^k)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f^p)\right)$$

Pour la suite, on prend la plus petite valeur de p vérifiant cette propriété.
E est de dimension finie et f est un endomorphisme non-bijectif, donc f n'est pas injectif et $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id})$. Ainsi $\boxed{p \geq 1}$.
Ayant choisi p minimal, on a $\dim\left(\mathrm{Ker}(f^{p-1})\right) \neq \dim\left(\mathrm{Ker}(f^p)\right)$ et donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f^{p-1}) \neq \mathrm{Ker}(f^p)}$$

Pour $k \geq p$, on a ainsi $\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f^k)$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}(f^k)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f^p)\right)$, donc

$$\boxed{\forall k \geq p, \quad \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^p)}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la formule du rang appliquée à f^k et f^{k+1}, on a

$$\begin{aligned} rg(f^k) - rg(f^{k+1}) &= \left(n - \dim\left(\mathrm{Ker}(f^k)\right)\right) - \left(n - \dim\left(\mathrm{Ker}(f^{k+1})\right)\right) \\ &= \dim\left(\mathrm{Ker}(f^{k+1})\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(f^k)\right) \end{aligned}$$

On voit ainsi que $rg(f^{p-1}) \neq rg(f^p)$ et pour $k \geq p$, on a $rg(f^k) = rg(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^k) \subset \mathrm{Im}(f^p)$, d'où

$$\boxed{\mathrm{Im}(f^{p-1}) \neq \mathrm{Im}(f^p) \quad \text{ et } \quad \forall k \geq p, \quad \mathrm{Im}(f^k) \subset \mathrm{Im}(f^p)}$$

15. On a $2p \geq p$ donc $\mathrm{Ker}(f^{2p}) = \mathrm{Ker}(f^p)$.
Soit $y \in \mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p)$. Puisque $y \in \mathrm{Im}(f^p)$, il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
$y \in \mathrm{Ker}(f^p)$, donc $0_E = f^p(y) = f^{2p}(x)$ et par conséquent $x \in \mathrm{Ker}(f^{2p})$. Or $\mathrm{Ker}(f^{2p}) = \mathrm{Ker}(f^p)$, donc $y = f^p(x) = 0_E$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0_E\}$. De plus, d'après la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f^p)) + rg(f^p) = n$. Donc

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)}$$

16.
- On commence par montrer que $\mathrm{Ker}(f^p)$ est stable par f : pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f^p)$, on a $f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^p)$.
  Ainsi f réalise bien un endomorphisme f_1 sur $\mathrm{Ker}(f^p)$.
  De plus, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f^p)$ on a évidemment $f_1^p(x) = f^p(x) = 0_E$ donc f_1 est nilpotent d'indice inférieur ou égal à p.
  Or $\mathrm{Ker}(f^{p-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^p)$, donc il existe $x_0 \in \mathrm{Ker}(f^p) \setminus \mathrm{Ker}(f^{p-1})$ pour lequel on a donc $f_1^{p-1}(x_0) = f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Ainsi $\boxed{f_1 \text{ est nilpotent d'indice } p.}$

- De même, on montre que $\mathrm{Im}(f^p)$ est stable par f : pour tout $y \in \mathrm{Im}(f^p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^p(x)$. Donc $f(y) = f^{p+1}(x) = f^p(f(x)) \in \mathrm{Im}(f^p)$. Ainsi
  $\boxed{f \text{ réalise bien un endomorphisme } f_2 \text{ sur } \mathrm{Im}(f^p).}$
  De plus $\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f^p) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f^p) \cap \mathrm{Ker}(f^p) = \{0_E\}$ donc f_2 est un endomorphisme injectif. Comme on est en dimension finie, cela implique que
  $\boxed{f_2 \text{ est un automorphisme sur } \mathrm{Im}(f^p).}$

Partie F : La condition (C_2) implique la condition (C_1) : cas non bijectif.

17. On calcule : $u^2 = a^2+a\circ b+b\circ a+b^2 = a\circ b+b\circ a$. On en déduit que $a\circ u^2 = a^2\circ b+a\circ b\circ a = a\circ b\circ a$ et $u^2 \circ a = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = a \circ b \circ a$.
On voit ainsi que $a \circ u^2 = u^2 \circ a$. Et de même $b \circ u^2 = u^2 \circ b$.

18. Considérons l'entier p obtenu dans la partie E. Pour tout $k \geq p$, on a

$$\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^p), \quad \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^p) \quad \text{et} \quad E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$$

En prenant n'importe quel entier pair q supérieur ou égal à p, on obtient $E = \mathrm{Ker}(f^q) \oplus \mathrm{Im}(f^q)$.

19. a et b commutent avec u^2 et q est pair donc a et b commutent avec u^q.
Pour tout $y \in \mathrm{Im}(u^q)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^q(x)$. On a alors $a(y) = a\left(u^q(x)\right) = u^q\left(a(x)\right) \in \mathrm{Im}(u^q)$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(u^q) \text{ est stable par } a. \text{ Et de même } \mathrm{Im}(u^q) \text{ est stable par } b.}$$

Ainsi, a et b induisent des endomorphismes sur $E_1 = \mathrm{Im}(u^q)$. Dans la partie E, on a vu que u induisait un automorphisme u_1 sur E_1. On a donc $u_1 = a_1 + b_1$ avec $a_1^2 = 0$, $b_1^2 = 0$ et u_1 bijectif.
D'après la partie D, cela implique que $\underline{u_1 \text{ est échangeur.}}$

20. D'après la partie E, u induit un endomorphisme u_2 nilpotent sur $\mathrm{Ker}(u^q)$. Et d'après le théorème ♡ de la partie B, cela implique que $\underline{u_2 \text{ est échangeur.}}$

21. D'après la question 19 il existe deux sous-espaces vectoriels F_1 et G_1 de E_1 tels que

$$E_1 = F_1 \oplus G_1 \quad \text{et} \quad u(F_1) = u_1(F_1) \subset G_1, \quad u(G_1) = u_1(G_1) \subset F_1$$

De même d'après la question 20 il existe deux sous-espaces vectoriels F_2 et G_2 de E_2 tels que

$$E_2 = F_2 \oplus G_2 \quad \text{et} \quad u(F_2) = u_2(F_2) \subset G_2, \quad u(G_2) = u_2(G_2) \subset F_2$$

Puisque $E = E_1 \oplus E_2$, on en déduit que

$$E = F_1 \oplus G_1 \oplus F_2 \oplus G_2$$

On pose $F = F_1 + F_2$, $G = G_1 + G_2$ et voit que

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad u(F) = u(F_1) + u(F_2) \subset G_1 + G_2, \quad u(G) = u(G_1) + u(G_2) \subset F_1 + F_2$$

Ce qui prouve que $\boxed{u \text{ est échangeur.}}$