Lycée Champollion, PCSI-1-2-3, 2023–2024.
Samedi 25 Mai 2024

Durée : 4 heures.

Instructions générales :
Aucun document n'est autorisé.
L'emploi d'une calculatrice est interdit.
Dans chaque question, les résultats demandés seront $\boxed{\textbf{encadrés}}$, les étapes des méthodes mises en oeuvre et les résultats intermédiaires seront mis en évidence par un **surlignement**, une ligne sautée ou tout autre moyen de votre choix.
Vous êtes enfin invités à porter une attention particulière à la rédaction et à l'orthographe : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Ce DS sera IMPERATIVEMENT rendu sur 2 copies séparées :

- sur la COPIE 1 : Exercice et Problème parties B, D, F
- sur la COPIE 2 : Problème parties A, C, E

Barème indicatif sur points (donnant une idée du temps respectif qu'il est bon de consacrer à chaque partie).
Exercice $\simeq$ 10pt ; Problème $\simeq$ 67pt : A$\simeq$ 19pt, B$\simeq$ 17pt, C$\simeq$ 6pt, D$\simeq$ 6pt, E$\simeq$ 11pt, F$\simeq$ 8pt

---

Exercice

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne deux tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y). Montrez que vous obtenez bien une distribution de probabilité.
2. En déduire la loi marginale de X et la loi marginale de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Notons $Z = n + 1 - X$. Montrer que Z suit la même loi que Y.
4. Calculer les espérances de X et de Y. On présentera les résultats sous forme factorisée.

Problème

Dans tout ce problème, n est un entier naturel non-nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f \circ f^k$.

L'objectif de ce problème est d'étudier les endomorphismes de E qui sont dits **échangeurs** *, c'est-à-dire les $u \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels la condition (C_1) suivante est vérifiée :*

(C_1) : *il existe des sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que*

$$u(F) \subset G \quad \text{et} \quad u(G) \subset F$$

On note $\mathcal{E}ch(E)$ l'ensemble des endomorphismes échangeurs de E.

Partie A : Exemples en dimension 3.

À rendre sur la copie 2.

Dans cette partie on suppose que $\dim(E) = 3$*, c'est-à-dire* $n = 3$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé.

   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et préciser une base et la dimension de chacun.

   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$ et préciser une base de chacun.

   (c) En déduire une base (v_1, v_2, v_3), constituée de vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ * \\ * \end{pmatrix}$, dans laquelle la matrice de f est diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   (d) Posons $v_1' = v_1 + v_3$, $v_2' = v_2$, $v_3' = v_1 - v_3$ et $F_1 = \mathrm{Vect}(v_1', v_2')$, $G_1 = \mathrm{Vect}(v_3')$.
   Déterminer les ensembles images $f(F_1)$ et $f(G_1)$. En déduire que f est échangeur.

2. Dans cette question, on se fixe un plan $F_2 = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ et une droite $G_2 = \mathrm{Vect}(w_3)$ supplémentaires dans E. On considère l'ensemble $\mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2)$ constitué des $u \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifient

   $$u(F_2) \subset G_2 \quad \text{et} \quad u(G_2) \subset F_2 \qquad (\star)$$

   On note aussi $\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & \delta & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2)$ est un espace vectoriel.

   (b) Justifier que $\mathcal{W} = (w_1, w_2, w_3)$ est une base de E. Montrer que $u \in \mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2)$ si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{W}$ appartient à $\mathcal{K}$.

   (c) Déterminer la dimension de $\mathcal{K}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}ch(F_2 \oplus G_2)$.

Partie B : les endomorphismes nilpotents sont échangeurs.

À rendre sur la copie 1.

Soit f *un endomorphisme de* E*,* **nilpotent d'indice** $p \in \mathbb{N}^*$ *, c'est-à-dire vérifiant*

$$f^{p-1} \neq 0 \quad \textit{et} \quad f^p = 0$$

Soit $x_0 \in E$ *tel que* $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.

3. Montrer que la famille $\mathcal{L} = \left(f^k(x_0)\right)_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. Et justifier que $p \leq n$.

4. Dans cette question, on suppose que $p = n$.

   (a) Justifier que $\mathcal{L}$ est une base de E. Déterminer la matrice de f dans cette base.

   (b) Montrer que f est échangeur. Indication : on pourra considérer les sous-espaces vectoriels

   $$E_0 = \mathrm{Vect}\left(f^{2k}(x_0)\right)_{0 \leq 2k \leq n-1} \quad \text{et} \quad E_1 = \mathrm{Vect}\left(f^{2k+1}(x_0)\right)_{1 \leq 2k+1 \leq n-1}$$

5. Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et $p = 2$, c'est-à-dire $\dim(E) = 3$, $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $rg(f)$.
   (b) Justifier que l'on peut trouver un vecteur $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que la famille $\mathcal{B} = \Big(x_0,\, f(x_0),\, x_1\Big)$ soit une base de E. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Montrer que f est échangeur.

Pour la suite, on admet la généralisation suivante de ces résultats :

Théorème ♡ : tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

6. Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associés à ces matrices et posons $h = f + g$.
   Montrer que f et g sont échangeurs et que h est bijective.
   En déduire que $\mathcal{E}ch(\mathbb{C}^3)$ n'est pas un espace vectoriel.

Pour deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est **semblable** *à u lorsqu'il existe un automorphisme ϕ de E tel que $v = \phi \circ u \circ \phi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \phi^{-1} \circ v \circ \left(\phi^{-1}\right)^{-1}$, si bien que u est semblable à v.*
L'objectif du reste du problème est d'établir, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) L'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est échangeur.

(C2) Il existe $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b \in \mathcal{L}(E)$, tels que $u = a + b$ avec $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.

(C3) Les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Partie C : La condition $(C1)$ implique $(C2)$ et $(C3)$.

À rendre sur la copie 2.

Dans cette partie, on suppose que u est un endomorphisme échangeur, et on se donne une décomposition $E = F \oplus G$ avec $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.
On note p_F et p_G les projecteurs associés et $s = p_F - p_G$.

7. Posons $a = u \circ p_F$ et $b = u \circ p_G$.
   Exprimer $p_F \circ a$, $p_G \circ a$ et $p_F \circ b$, $p_G \circ b$ en fonction de a et b seulement.
8. En déduire que $(C1)$ implique $(C2)$.
9. Calculer et simplifier $s \circ u \circ s$. En déduire que $(C1)$ implique $(C3)$.

Partie D : La condition (C_2) implique la condition (C_1) : cas d'un automorphisme.

À rendre sur la copie 1.

Dans cette partie, u désigne un **automorphisme** *de E vérifiant la condition (C_2), c'est-à-dire qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que*

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

10. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que $\dim\left(\mathrm{Ker} f\right) \geq \dfrac{n}{2}$.

11. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)$, et que $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(b)$.

12. En déduire que u est échangeur.

Partie E : Intermède ; un principe de décomposition.

À rendre sur la copie 2.

Dans cette partie, f est un endomorphisme non-bijectif de E.

13. Montrer que la suite $\left(\mathrm{Ker}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
    Déterminer un résultat analogue pour la suite $\left(\mathrm{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

14. Montrer qu'il existe un entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mathrm{Ker}(f^{p-1}) \neq \mathrm{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad \forall k \geq p, \quad \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^p)$$

    Que peut-on en déduire concernant les ensembles $\mathrm{Im}(f^{p-1})$, $\mathrm{Im}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^k)$ pour $k \geq p$?

15. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$. Indication : on pourra remarquer, après justification, que $\mathrm{Ker}(f^{2p}) = \mathrm{Ker}(f^p)$.

16. Montrer que f induit un endomorphisme nilpotent sur $\mathrm{Ker}(f^p)$ (préciser l'indice de nilpotence).
    Montrer que f induit un automorphisme sur $\mathrm{Im}(f^p)$.

Partie F : La condition (C_2) implique la condition (C_1) : cas non bijectif.

À rendre sur la copie 1.

On considère ici un endomorphisme u non bijectif et vérifiant la condition (C_2) : c'est-à-dire qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \textit{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

Pour traiter une partie des questions qui suivent vous aurez probablement besoin de certains des résultats des parties B, D et E.

17. Montrer que a et b commutent avec u^2.

18. Justifier qu'il existe un entier pair q tel que $E = \mathrm{Ker}(u^q) \oplus \mathrm{Im}(u^q)$.

19. Montrer que u, a et b induisent des endomorphismes, notés u_1, a_1 et b_1, sur le sous-espace vectoriel $E_1 = \mathrm{Im}(u^q)$. Justifier que u_1 est échangeur.

20. Montrer que u induit un endomorphisme, noté u_2, sur $E_2 = \mathrm{Ker}(u^q)$. Justifier que u_2 est échangeur.

21. En déduire que u est échangeur.