

DS n°8

I Exercices

Exercice 1 [Une application linéaire]

1. Par définition, f est une application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Montrons la linéarité.

Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda x_1 - 3\mu x_1 + 2\lambda x_1 + 2\mu x_2 - 4\lambda z_1 - 4\mu z_2 \\ 2\lambda x_1 + 2\mu x_2 + 2\lambda z_1 + 2\mu z_2 \\ 4\lambda x_1 + 4\mu x_2 - 2\lambda y_1 - 2\mu y_2 + 5\lambda z_1 + 5\mu z_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité.

L'application f est donc une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans lui-même : c'est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

2. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 2y \end{cases} \end{aligned}$$

Et donc $\text{Ker } f = \{(-2y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-2, 1, 2))$. Et on a bien une base : c'est une famille génératrice (par construction) qui est libre (famille constituée d'un seul vecteur non nul).

3. Pour l'image, on peut regarder l'image de la base canonique (qui engendre l'image) ou y aller de manière plus directe, ce qu'on fait ici. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors $(a, b, c) \in \text{Im } f$ si, et seulement si, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (a, b, c)$. On résout le système associé (de paramètres a, b, c et d'inconnues x, y, z). On a :

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - 4z = a \\ 2x + 2z = b \\ 4x - 2y + 5z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = b/2 \\ 2y - z = a + 3b/2 \\ -2y + z = c - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = b/2 \\ 2y - z = a + 3b/2 \\ 0 = a - b/2 + c \end{cases} \end{aligned}$$

et le dernier système possède une solution si, et seulement si, $a - b/2 + c = 0$, c'est-à-dire $2a - b + 2c = 0$. On déduit que :

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - b + 2c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 2a + 2c\} \\ &= \{(a, 2a + 2c, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne bien une base : elle est génératrice (par construction) et libre (constituée de deux vecteurs non proportionnels, comme ils n'ont pas leurs 0 au même endroit).

4. L'application f n'est donc ni injective (on a $\text{Ker } f \neq \{0\}$, comme $f(-2, 1, 2) = (0, 0, 0)$) ni surjective (on a $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$ comme $(1, 0, 0) \notin \text{Im } f$ puisque $2 - 0 + 0 \neq 0$).

Elle n'est donc pas bijective.

5. Calculons $f \circ f$. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} -3x + 2y - 4z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(-3x + 2y - 4z) + 2(2x + 2z) - 4(4x - 2y + 5z) \\ 2(-3x + 2y - 4z) + 2(4x - 2y + 5z) \\ 4(-3x + 2y - 4z) - 2(2x + 2z) + 5(4x - 2y + 5z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3x + 2y - 4z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 5z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc $f \circ f = f$: c'est donc un projecteur. On déduit que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$, et que $\text{Im } f = \text{Ker}(f - \text{id})$.

6. On a directement l'écriture pour tout $u \in \mathbb{R}^3$:

$$u = \underbrace{f(u)}_{\in \text{Im } f} + \underbrace{u - f(u)}_{\in \text{Ker } f}.$$

Et ainsi :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 2y - 4z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 5z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 2y + 4z \\ -2x + y - 2z \\ -4x + 2y - 4z \end{pmatrix}.$$

7. On a directement $s = 2f - \text{id}$. Avec l'expression de f , on a donc :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x + 4y - 8z \\ 4x - y + 4z \\ 8x - 4y + 9z \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 [Développements limités et analyse asymptotique]

1. On a directement les formules du cours :

$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}), \quad \text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + o(x^{2n+1}) \\ \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \end{aligned}$$

2. Notons que, par produit de fonctions impaires, la fonction $x \mapsto \sin(x)\tan(x)$ est paire. De plus, on a par équivalent classique :

$$\sin(x)\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

et donc $\sin(x)\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2)$. Par parité, le terme d'ordre 3 dans le développement limité cherché est nul, et donc :

$$\sin(x)\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^3).$$

3. Comme à la question précédente, on peut déjà constater que la fonction considérée est paire, et donc il suffit de raisonner à l'ordre 4 pour avoir le développement limité à l'ordre 5. On a directement :

$$\begin{aligned} \ln(1 + \cos(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln \left(2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) = \ln(2) + \ln \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5) \right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5) \right)^3 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^5) \end{aligned}$$

4. (a) La fonction \ln est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , donc sur $]0; 2[$. La fonction $x \mapsto 2 - x$ est polynomiale, donc \mathcal{C}^∞ sur $]0; 2[$, et ne s'y annule pas. Par quotient, la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{2-x}$ est \mathcal{C}^∞ sur $]0; 2[$.

La fonction id est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , donc sur $]0; 2[$.

Par différence, f est donc \mathcal{C}^∞ sur $]0; 2[$.

Par formule de Taylor–Young, elle admet donc des développements limités à tout ordre et en tout point de $]0; 2[$.

- (b) On a directement pour $x \in]0; 2[$, en posant $x = 1 + h$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{2-(1+h)} - 1 - h \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4) \right) (1+h+h^2+h^3+h^4+o(h^4)) - 1 - h \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} -1 + \frac{h^2}{2} + \frac{5h^3}{6} + \frac{7h^4}{12} + o(h^4) \\ &\underset{x \rightarrow 1}{=} -1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{5(x-1)^3}{6} + \frac{7(x-1)^4}{12} + o((x-1)^4) \end{aligned}$$

- (c) Par formule de Taylor–Young, on a également :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{24}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$$

et par unicité d'un développement limité on déduit :

$$f(1) = -1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 1, \quad f^{(3)}(1) = 5 \text{ et } f^{(4)}(1) = 14.$$

- (d) On déduit aussi que f possède un point critique en 1, et que ce point critique est un minimum local : on a en effet $f(x) - f(1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{(x-1)^2}{2}$ qui est positif au voisinage de 1. Ce n'est pas un extremum global, comme par opérations sur les limites on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

ce qui assure que la fonction f n'est pas minorée sur $]0; 2[$, et n'a donc pas de minimum global.

Remarque : on a également : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$. La fonction f n'est donc pas non plus majorée, et n'admet pas de minimum global.

5. (a) La fonction g est définie sur \mathbb{R} , en tant que produit de $x \mapsto (x^2 - 2)(x + 3)$ qui est définie sur \mathbb{R} (en tant que polynôme) et de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ qui est également définie sur \mathbb{R} .
 (b) On utilise directement le développement limité de $(1+x)^\alpha$ en 0, pour $\alpha = 1/3$, ce qui donne :

$$\sqrt[3]{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2).$$

- (c) On a :

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right)^2 + o \left(\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right)^2 \right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{3x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 1 - \frac{5}{3x} + o \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

(d) On déduit ainsi que :

$$g(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{5}{3x}$$

qui tend donc vers 0 par valeurs négatives : la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de g en $+\infty$, et la courbe de g est en dessous de son asymptote en $+\infty$.

(e) En $-\infty$, on retrouve exactement les mêmes calculs, et ainsi :

$$g(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{5}{3x}$$

qui tend vers 0, mais pas valeurs positives cette fois-ci. Et ainsi la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de g en $-\infty$, et la courbe de g est au dessus de son asymptote en $-\infty$.

Exercice 3 [Hyperplan et projecteur]

- Comme H est un hyperplan de E , alors φ est non nulle. Il existe donc $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Et alors par linéarité, on a que $x_0 = \frac{1}{\varphi(x)}x$ convient, car :

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \varphi(x) = 1.$$

Tout autre élément qui convient diffère de x_0 d'un élément de H . On a en effet pour tout $x \in E$ que :

$$\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) \in \text{Ker}\varphi = H \Leftrightarrow x \in x_0 + H.$$

- On a :

- f est bien définie sur E : car φ est définie sur E , donc f également ;
- f est à valeurs dans E : si $x \in E$, alors $\varphi(x) \in \mathbb{K}$, donc $f(x)$ est une combinaison linéaire d'éléments de E (à savoir x et x_0), et est donc bien un élément de E comme E est un espace vectoriel ;
- f est linéaire : si $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors par linéarité de φ :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y - \varphi(\lambda x + \mu y)x_0 = \lambda \underbrace{(x - \varphi(x) \cdot x_0)}_{=f(x)} + \mu \underbrace{(y - \varphi(y) \cdot x_0)}_{=f(y)} = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

ce qui prouve bien la linéarité.

Et finalement : $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On a déjà que : $f(x_0) = x_0 - \varphi(x_0) \cdot x_0 = x_0 - x_0 = 0$.

Et si $x \in E$, alors :

- si $x \in \text{Ker}f$: alors $x = \varphi(x) \cdot x_0 \in \text{Vect}(x_0)$;
- si $x \in \text{Vect}(x_0)$: notons $x = \lambda x_0$, et alors par linéarité : $f(x) = \lambda f(x_0) = 0$.

Donc par double inclusion : $\text{Ker}f = \text{Vect}(x_0)$.

- On procède par double inclusion :

- si $y \in \text{Im}f$: notons $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors :

$$\varphi(y) = \varphi(f(x)) = \varphi(x - \varphi(x) \cdot x_0) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(x_0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

et donc $y \in \text{Ker}(\varphi) = H$;

— si $y \in H$: alors $\varphi(y) = 0$ et donc :

$$y = y - \varphi(y) \cdot x_0 = f(y) \in \text{Im}f$$

Et donc on a bien : $\text{Im}f = \text{Ker}\varphi$.

5. Si $x \in E$, alors :

$$f \circ f(x) = f(x - \varphi(x) \cdot x_0) = f(x) - \varphi(x)f(x_0) = f(x)$$

et donc $f \circ f = f$.

Donc f est un projecteur. Comme on a déterminé $\text{Im}f$ et $\text{Ker}f$, on déduit que f est le projecteur sur H parallèlement à $\text{Vect}(x_0)$.

Exercice 4 [Composée de projecteurs]

1. Comme une composée d'endomorphismes est un endomorphisme, il suffit de prouver que r est idempotent. On a :

$$r^2 = (p \circ q)^2 = p \circ \underbrace{(q \circ p)}_{=p \circ q} \circ q = \underbrace{(p \circ p)}_{=p} \circ \underbrace{(q \circ q)}_{=q} = p \circ q = r.$$

Donc r est un endomorphisme idempotent, c'est un projecteur.

2. On procède par double inclusion :

— si $x \in \text{Im}(r)$: alors comme r est un projecteur, on a :

$$x = r(x) = p \circ q(x) = \underbrace{p(q(x))}_{\in \text{Im}p} = q \circ p(x) = \underbrace{q(p(x))}_{\in \text{Im}q} \in \text{Im}p \cap \text{Im}q.$$

— si $x \in \text{Im}p \cap \text{Im}q$: comme p et q sont des projecteurs, alors $x = p(x) = q(x)$, et donc $x = p \circ q(x) = r(x) \in \text{Im}(r)$.

ce qui prouve l'égalité par double inclusion.

3. On procède à nouveau par double inclusion :

— si $x \in \text{Ker}(r)$: alors $p \circ q(x) = 0$, donc $q(x) \in \text{Ker}(p)$, et donc :

$$x = \underbrace{q(x)}_{\in \text{Kerp}} + \underbrace{(x - q(x))}_{\in \text{Ker}q} \in \text{Kerp} + \text{Ker}q$$

— si $x \in \text{Kerp} + \text{Ker}q$: on note $x = x_p + x_q$ pour $x_p \in \text{Kerp}$ et $x_q \in \text{Ker}q$. Alors :

$$r(x) = p \circ q(x_p) + p \circ q(x_q) = q \circ p(x_p) + p \circ q(x_q) = q(0) + p(0) = 0$$

donc $x \in \text{Ker}(r)$.

ce qui donne l'égalité par double inclusion.

II Problèmes

II.1 Problème 1 : Équation différentielle et espace vectoriel

1. On a un polynôme de degré 3, donc on le factorise grâce à une racine évidente : 1 est racine évidente, et on a la factorisation :

$$X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1) = (X + 1)(X + i)(X - i)$$

où la première factorisation est la factorisation sur \mathbb{R} , et la seconde celle sur \mathbb{C} .

2. L'ensemble \mathcal{S} est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène : il contient la fonction nulle, et est stable par combinaisons linéaire, et c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc bien un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Pour la stabilité par dérivation, considérons $f \in \mathcal{S}$. Alors : $f''' + f'' + f' + f = 0$. En dérivant, il vient :

$$0 = f^{(4)} + f''' + f'' + f' = (f')''' + (f')'' + (f')' + (f')$$

et donc $f' \in \mathcal{S}$, ce qui prouve le résultat.

3. (a) Par composée des fonctions \exp et $x \mapsto -x$, qui sont \mathcal{C}^∞ , la fonction g est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec :

$$g' : x \mapsto -e^{-x}$$

et donc $g' = -g$. Il vient alors par linéarité de la dérivation : $g'' = g$ et $g''' = -g$ et ainsi : $g''' + g'' + g' + g = 0$. Donc $g \in \mathcal{S}$.

(b) Ainsi $g \in \mathcal{S}$, qui est un espace vectoriel. Par minimalité de $\text{Vect}(g)$ parmi les espaces vectoriels contenant g , on a bien : $\text{Vect}(g) \subset \mathcal{S}$.

(c) On a prouvé que $g' = -g$. Donc g est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$. Et ses solutions forment l'ensemble $\text{Vect}(g)$, donc cette équation convient.

4. (a) L'ensemble \mathcal{T} est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène : c'est donc un espace vectoriel. Pour montrer que c'est un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} , il suffit de prouver qu'il est inclus dans \mathcal{S} .

Soit $f \in \mathcal{T}$: alors $f'' + f = 0$. Par linéarité de la dérivation : $f''' + f' = 0$. Et en sommant ces deux égalités il vient : $f''' + f'' + f' + f = 0$, donc $f \in \mathcal{S}$. Ce qui prouve bien l'inclusion cherchée.

(b) L'équation différentielle $y'' + y = 0$ a pour équation caractéristique $X^2 + 1$, dont les racines sont $\pm i$. Ses solutions réelles sont donc de la forme $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$. Et donc $c = \cos$ et $s = \sin$ conviennent.

5. Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors $f''' + f'' + f' + f = 0$. Et donc :

$$(f'' + f)' + (f'' + f) = f''' + f' + f'' + f = 0$$

Donc $(f'' + f)$ est solution de l'équation $y' + y = 0$, donc $(f'' + f) \in \text{Vect}(g)$.

6. De même, pour $f \in \mathcal{S}$ on a :

$$(f' + f)'' + (f' + f) = f''' + f'' + f' + f = 0$$

ce qui prouve bien que $f' + f \in \mathcal{T}$.

7. Notons déjà que \mathcal{T} et $\text{Vect}(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathcal{S} . La somme $\text{Vect}(g) + \mathcal{T}$ est donc un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} .

Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, il suffit donc de montrer que tout élément de \mathcal{S} s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\text{Vect}(g)$ et d'un élément de \mathcal{T} , ce que l'on fait par analyse-synthèse. Soit $f \in \mathcal{S}$:

— analyse : si $f = h_1 + h_2$ pour $h_1 \in \text{Vect}(g)$ et $h_2 \in \mathcal{T}$, alors $h_1' = -h_1$, donc $h_1'' = -h_1' = h_1$, et $h_2'' = -h_2$. Et ainsi : $f'' = h_1'' + h_2'' = h_1 - h_2$. Donc nécessairement $h_1 = \frac{f + f''}{2}$ et $h_2 = \frac{f - f''}{2}$;

— synthèse : on a prouvé que $(f'' + f) \in \text{Vect}(g)$ et $(f' + f) \in \mathcal{T}$. L'ensemble \mathcal{T} étant stable par dérivation (même démonstration que pour \mathcal{S}), on a donc également $(f'' + f) \in \mathcal{T}$. Par multiplication par $1/2$ il vient $h_1 = \frac{f'' + f}{2} \in \text{Vect}(g)$ et par différence et multiplication par $1/2$ il vient $h_2 = \frac{f - f''}{2} = \frac{(f + f') - (f'' + f'')}{2} \in \mathcal{T}$. Et on a bien $f = h_1 + h_2$.

Ce qui prouve bien : $\mathcal{S} = \text{Vect}(g) \oplus \mathcal{T}$.

8. On a directement $\mathcal{S} = \text{Vect}(g, c, s)$.

Remarque : il s'agit même d'une base de \mathcal{S} . Il suffit, par rapport à ce qu'on a déjà démontré, de prouver qu'elle est libre, ce qui se fait bien en appliquant la définition.

II.2 Problème 2 : Noyaux et images itérés d'un endomorphisme

1. Les F_n et G_n sont respectivement des images et des noyaux d'endomorphismes : ce sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $G_n \subset G_{n+1}$ et $F_{n+1} \subset F_n$:
 - soit $x \in G_n$: alors $f^n(x) = 0$ donc $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0) = 0$ (par linéarité de f) donc $x \in G_{n+1}$ ce qui prouve la première inclusion ;
 - soit $y \in F_{n+1}$: posons $x \in E$ tel que $y = f^{n+1}(x)$. Alors $y = f^n(f(x))$ donc $y \in F_n$, ce qui prouve la seconde inclusion (qui ne repose en rien sur la linéarité).
3. En tant qu'intersection d'espaces vectoriels, F est un espace vectoriel (c'est du cours).

Pour G , on le montre par caractérisation des sous-espaces vectoriels :

- $0 \in G$: car $f(0) = 0$ donc $0 \in G_1 \subset G$;
- soient $x, y \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $x \in G_n$ et $y \in G_m$. Par la question précédente, on a : $G_n \subset G_{n+m}$ et $G_m \subset G_{n+m}$ (par croissance de la suite (G_n)). Et ainsi : $x, y \in G_{n+m}$. Comme G_{n+m} est un espace vectoriel, on a : $\lambda x + \mu y \in G_{n+m} \subset G$.

Et ainsi G est bien un sous-espace vectoriel de E .

4. Soit $y \in F$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $y \in F \subset F_n$, donc il existe $x \in E$ tel que $f^n(x) = y$, donc $f^n(f(x)) = f(y)$, et donc $f(y) \in F_n$. Comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien : $f(y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F$. Donc F est stable par f .

Soit $x \in G$. Posons $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in G_n$, c'est-à-dire que $f^n(x) = 0$. Alors $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0) = 0$ donc $f(x) \in G_n \subset G$. Donc G est stable par f .

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En tant que composée d'automorphismes, f^n est un automorphisme : le caractère injectif impose $G_n = \{0\}$ et le caractère surjectif $F_n = E$.

En passant à l'union et l'intersection, on a : $F = E$ et $G = \{0\}$.

6. Montrons que : pour tout $j \geq N$, on a : $F_{j+1} = F_j$. On procède par récurrence :
 - initialisation : pour $j = N$, on peut montrer que $F_N = F_{N+1}$, ce qui est l'hypothèse de l'énoncé ;
 - hérédité : soit $j \geq N$ tel que $F_{j+1} = F_j$. Montrons que $F_{j+1} = F_{j+2}$ par double inclusion :
 - par décroissance de la suite (F_n) , on a déjà : $F_{j+2} \subset F_{j+1}$;
 - soit $y \in F_{j+1}$: notons $x \in E$ tel que $y = f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Par hypothèse de récurrence, $F_j = F_{j+1}$. Comme $f^j(x) \in F_j$ (par définition), alors $f^j(x) \in F_{j+1}$, donc il existe $x' \in E$ tel que $f^j(x) = f^{j+1}(x')$. Pour un tel x' , on a : $y = f(f^{j+1}(x')) = f^{j+2}(x) \in F_{j+2}$. Ce qui prouve la seconde inclusion.

On a ainsi l'hérédité par double inclusion.

D'où le résultat par récurrence.

La suite (F_n) est constante à partir du rang N , ce qui est bien le résultat demandé.

7. L'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que $F_{k+1} = F_k$ est une partie non vide (il contient N) de \mathbb{N} : il admet donc un plus petit élément.
8. Notons déjà que, par stationnarité et décroissance de la suite (F_n) , on a : $F = F_{r(f)}$. Et même : pour tout $n \geq r(f)$, $F = F_n$.

Soit $x \in E$. Alors $y = f^{r(f)}(x) \in F = F_{2r(f)}$. Il existe donc $x' \in E$ tel que $y = f^{2r(f)}(x')$. Et ainsi : $f^{r(f)}(x - f^{r(f)}(x')) = y - y = 0$. Donc :

$$x = \underbrace{f^{r(f)}(x')}_{\in F} + \underbrace{x - f^{r(f)}(x')}_{\in G_{r(f)}}.$$

9. On démontre de même qu'à la question 6 que la suite (G_n) est stationnaire à partir du rang N , en montrant par récurrence que, pour tout $j \geq N$: $G_j = G_{j+1}$:

— initialisation : donnée dans l'énoncé ;

— hérédité : soit $j \geq N$ tel que $G_j = G_{j+1}$, alors :

— par croissance de la suite (G_n) on a : $G_{j+1} \subset G_{j+2}$;

— soit $x \in G_{j+2}$: alors $f^{j+2}(x) = 0 = f^{j+1}(f(x))$ donc $f(x) \in G_{j+1} = G_j$ donc $f^j(f(x)) = 0$, et donc $f^{j+1}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in G_{j+1}$.

D'où l'hérédité par double inclusion.

D'où le résultat par récurrence.

10. L'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que $G_{k+1} = G_k$ est une partie non vide (il contient N) de \mathbb{N} , donc admet un plus petit élément.

11. Notons déjà que, comme la suite (G_n) est stationnaire à partir du rang $s(f)$ on a : $G = G_{s(f)}$, et même pour tout $n \geq s(f)$, $G = G_n$.

Soit $y \in F_{s(f)} \cap G$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{s(f)}(x)$ et $f^{s(f)}(y) = 0$. Et ainsi : $f^{2s(f)}(x) = f^{s(f)}(y) = 0$ donc $x \in G_{2s(f)} = G_{s(f)}$. Donc $f^{s(f)}(x) = 0$. Donc $y = 0$.

On a donc l'inclusion $F_{s(f)} \cap G \subset \{0\}$. L'autre inclusion est directement vérifiée comme on étudie une intersection d'espaces vectoriels.

Et finalement on a bien : $F_{s(f)} \cap G = \{0\}$.

12. On a déjà l'inclusion $G_n \subset G_{n+1}$. Montrons l'autre inclusion.

Soit $x \in G_{n+1}$. Alors $f^{n+1}(x) = 0$. Mais $f^n(x) \in F_n = F_{n+1}$ donc il existe x' tel que $f^n(x) = f^{n+1}(x')$. Pour un tel x' , on a :

$$0 = f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(f^{n+1}(x')) = f^{n+2}(x')$$

et donc $x' \in G_{n+2} = G_{n+1}$. Donc $f^{n+1}(x') = 0$. Donc $f^n(x) = 0$, c'est-à-dire que $x \in G_n$. Ce qui prouve l'autre inclusion.

D'où l'égalité par double inclusion.

13. On a déjà l'inclusion $F_{n+1} \subset F_n$. Montrons l'autre inclusion.

Soit $y \in F_n$. Posons $x \in E$ tel que $y = f^n(x)$. Alors $f(y) = f^{n+1}(x) \in F_{n+1} = F_{n+2}$ donc il existe $x' \in E$ tel que $f(y) = f^{n+1}(x) = f^{n+2}(x')$. Pour un tel x' , on a donc par linéarité : $f^{n+1}(x - f(x')) = y - y = 0$, donc $(x - f(x')) \in G_{n+1} = G_n$. Donc $f^n(x - f(x')) = 0$, ce qui donne par linéarité : $f^{n+1}(x') = f^n(x) = y$, donc $y \in F_{n+1}$.

14. D'après les deux questions précédentes, on a directement $r(f) \leq s(f)$ et $s(f) \leq r(f)$ (sinon cela contredirait la minimalité de $r(f)$ et de $s(f)$), et donc $r(f) = s(f)$.

15. Si on pose $n = r(f) = s(f)$, alors $F = F_n$ et $G = G_n$. Par les questions 8 et 11 on a ainsi : $E = F_n + G_n$ et $F_n \cap G_n = 0$. Et donc $E = F_n \oplus G_n$, ce qui est le résultat demandé.

16. On garde la notation $n = p(f) = s(f)$. Montrons séparément injectivité et surjectivité :

— injectivité : soit $y \in \text{Ker}(f_F)$: alors $y \in F$ (par définition) et $f(y) = 0$. Mais $F = F_n$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f^n(x)$, et ainsi : $f(y) = f^{n+1}(x) = 0$, donc $x \in F_{n+1} = F_n$ donc $f^n(x) = 0$, donc $y = 0$. Donc $\text{Ker}(f_F) = \{0\}$, et f_F est bien injective.

— surjectivité : soit $y \in F$: $F = F_n = F_{n+1}$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ avec $f^n(x) \in F_n = F$. Donc il existe $x \in F$ tel que $y = f(x)$, ce qui prouve la surjectivité.

17. Comme $G = G_n$ (avec $n = r(f) = s(f)$), alors pour tout $x \in G$ on a : $f^n(x) = 0$. Et donc la restriction de f à G est bien nilpotente ($p = n$ convient).

18. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose $f : P \mapsto P'$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $G_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc la suite (G_n) n'est pas stationnaire, et f n'est pas de caractère fini.

On pouvait aussi prendre $E = \mathbb{R}[X]$ et considérer $f : P \mapsto X \cdot P$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on trouve que $F_n = \{X^n \cdot P \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$ est l'ensemble des polynômes divisibles par X^n (ou admettant 0 comme racine de multiplicité au moins n), qui n'est pas non plus stationnaire.