DS n^{o}7

I Exercices

Exercice 1

1. (a) Les fonctions exp (fonction usuelle) et $x \mapsto \lambda x$ (polynôme) sont infiniment dérivables : par composition, f est infiniment dérivable.

   Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} : x \mapsto \lambda^n e^{\lambda x}$, c'est-à-dire $f^{(n)} = \lambda^n f$:
   - initialisation : pour $n = 0$, on a bien $f^{(0)} = f$.
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)} = \lambda^n$. Alors par linéarité :

   $$f^{(n+1)} = f^{(n)'} = \lambda^n f' = \lambda^n \cdot \lambda f = \lambda^{n+1} f$$

   ce qui prouve la récurrence

   (b) Le complexe α est un élément de $\mathbb{U}_n$, qu'on peut expliciter comme suit :

   $$\mathbb{U}_n = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \mid k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.$$

   (c) Les fonctions exp, cos (fonctions usuelles) et $x \mapsto ax$, $x \mapsto bx$ (polynômes) sont infiniment dérivables : par composée et produit, g est infiniment dérivable.

   Pour calculer la dérivée n-ème, on passe par les complexes, en notant que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{ax}\cos(bx) = \mathrm{Re}\left(e^{ax}e^{ibx}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\alpha x}\right).$$

   Par la question a), on déduit que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \mathrm{Re}\left(\alpha^n e^{\alpha x}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\alpha x}\right) = e^{ax}\cos(bx) = g(x)$$

   en notant que $\alpha^n = 1$ (par définition de α). Et finalement : $g^{(n)} = g$.

2. (a) On note directement que 0 est racine double de Q, ce qui donne déjà : $Q = X^2(X^2 - 8X + 16)$. Et le second facteur faire directement apparaître une identité remarquable. Et ainsi : $Q = X^2(X-4)^2$.

   Il s'agit bien de la factorisation en produit d'irréductibles comme tous les facteurs sont de degré 1 donc irréductibles (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ d'ailleurs).

   (b) Notons $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$ (forme algébrique). On a :

   $$\delta^2 = 16 + 12i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 16 \\ 2ab & = & 12 \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{256 + 144} = 20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 18 \\ b^2 & = & 2 \\ ab & = & 6 \end{array} \right.$$

   $$\Leftrightarrow (a, b) = \left(3\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \text{ ou } \left(-3\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$$

   et donc les deux racines de $16 + 12i$ sont $\pm\left(3\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$.

   En passant au conjugué, on déduit que les deux racines de $16 - 12i$ sont $\pm\left(3\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$

   (c) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

   $$P(z) = 0 \Leftrightarrow Q(z) + 9 = 0 \Leftrightarrow Q(z) = -9$$

   mais l'expression précédente de Q donne : $Q(z) = z^2(z-4)^2 = \left(z(z-4)\right)^2$. Et ainsi :

   $$P(z) = 0 \Leftrightarrow \left(z(z-4)\right)^2 = -9 = (3i)^2 \Leftrightarrow z(z-4) = \pm 3i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z^2 - 4z - 3i & = & 0 \\ \text{ou } z^2 - 4z + 3i & = & 0 \end{array} \right.$$

   Résolvons séparément ces deux équations :

— pour $z^2 - 4z - 3i = 0$: le discriminant est : $16 + 12i$, dont on a déterminé que les racines sont $\pm\left(3\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$. Et donc les solutions sont :

$$z = \frac{4 \pm \left(3\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{4 + 3\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \frac{4 - 3\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

— pour $z^2 - 4z + 3i = 0$: le discriminant est $16 - 12i$, dont on a déterminé que les racines sont $\pm\left(3\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$. Et donc les solutions sont :

$$z = \frac{4 \pm \left(3\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{4 + 3\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \frac{4 - 3\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

Finalement, les racines de P sont les :

$$\frac{4 \pm 3\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$$

ce qui donne la factorisation en irréductibles sur $\mathbb{C}$ (comme P est unitaire) :

$$P = \left(X - \frac{4 + 3\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{4 - 3\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{4 + 3\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{4 - 3\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)$$

Pour la factorisation sur $\mathbb{R}$, il suffit de regrouper ensemble les polynômes correspondant aux racines complexes conjuguées. On a :

$$\left(X - \frac{4 + 3\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{4 + 3\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right) = \left(X^2 - (4 + 3\sqrt{2})X + (9 + 6\sqrt{2})\right)$$

$$\left(X - \frac{4 - 3\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{4 - 3\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right) = \left(X^2 - (4 - 3\sqrt{2})X + (9 - 6\sqrt{2})\right)$$

Et donc la factorisation sur $\mathbb{R}$ est :

$$P = \left(X^2 - (4 + 3\sqrt{2})X + (9 + 6\sqrt{2})\right)\left(X^2 - (4 - 3\sqrt{2})X + (9 - 6\sqrt{2})\right)$$

Exercice 2

1. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$:
   — si $k = 1$: on veut montrer que $f \circ g = g \circ f$, qui est donné dans l'énoncé ;
   — soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f \circ g^k = g^k \circ f$. Alors par associativité de la composition :

   $$f \circ g^{k+1} = f \circ g^k \circ g = g^k \circ f \circ g = g^k \circ g \circ f = g^{k+1} \circ f.$$

   d'où l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.
2. Si $f - g$ n'était pas de signe constant, il existerait $x, y \in [0, 1]$ tels que $(f - g)(x) \leqslant 0 \leqslant (f - g)(y)$. Et par théorème de valeurs intermédiaires, la fonction $f - g$ s'annulerait en un point x_0 de $[0, 1]$.
   Pour un tel x_0, on aurait $f(x_0) = g(x_0)$, ce qui est interdit.
   Donc $f - g$ est de signe constant.
3. La fonction $f - g$ étant continue sur le segment $[0, 1]$, par théorème des bornes atteintes il existe m, M tels que $(f - g)([0, 1]) = [m, M]$.
   Comme $f - g$ est positive et ne s'annule pas, alors $f - g$ est strictement positive. Donc $m > 0$. Et ainsi ce choix de m convient.

4. On procède par récurrence :
   — si $k = 1$: on cherche à montrer que :
   $$\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant m + g(x)$$
   ce qui est ce qu'on a montré à la question précédente.
   — soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :
   $$\forall x \in [0,1],\ f^k(x) \geqslant km + g^k(x).$$
   Soit $x \in [0,1]$. En appliquant cette inégalité à $f(x) \in [0,1]$, on trouve :
   $$f^{k+1}(x) \geqslant km + g^k(f(x))$$
   De même, en appliquant l'inégalité correspondant au cas $k = 1$ avec $g^k(x)$, on trouve :
   $$f(g^k(x)) \geqslant m + g^{k+1}(x)$$
   Et en additionnant ces inégalités on trouve que :
   $$f^{k+1}(x) \geqslant (k+1)mg^{k+1}(x)$$
   comme $g^k(f(x)) = f(g^k(x))$ par la question 1.

   Ce qui prouve le résultat par récurrence.
5. Comme $g : [0,1] \to [0,1]$, on déduit que pour tout $x \in [0,1]$ on a :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^k(x) \geqslant km$$
   donc par encadrement la suite $(f^k(x))$ tend vers $+\infty$ (comme $m > 0$). Mais comme $f : [0,1] \to [0,1]$ cette suite est bornée, d'où la contradiction.
   Donc l'hypothèse de départ est fausse, et il existe bien $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 3 1. La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ne s'annulant qu'en 1, donc f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2. (a) Pour $x \in]0;1[$, on a : $0 < x < 1$. En multipliant par $x > 0$ cette inégalité, il vient : $0 < x^2 < x$. Et finalement :
   $$0 < x^2 < x < 1 \text{ et donc } [x^2, x] \subset]0;1[.$$
   (b) Comme f est continue sur l'intervalle $]0;1[$, par théorème fondamental de l'analyse, elle possède bien une primitive φ sur $]0;1[$.
   Par la question précédente, f étant continue sur $[x^2, x]$, F est bien définie pour $x \in]0;1[$.
   Et le lien entre primitive et intégrale assure que : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = \varphi(x^2) - \varphi(x)$.
   (c) La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ (sa dérivée est f, qui est continue sur $]0;1[$). Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont également $\mathcal{C}^1$ (polynômes). Par combinaison linéaire et composition, on déduit que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ avec :
   $$\forall x \in]0;1[,\ F'(x) = 2x\varphi'(x^2) - \varphi'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$
   Mais la fonction $x \mapsto x - 1$ est également $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ (polynôme), et ln est $\mathcal{C}^1$, ne s'annulant pas sur $]0;1[$, donc par quotient on déduit que F' est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$, donc que F y est $\mathcal{C}^2$, avec :
   $$\forall x \in]0;1[,\ F''(x) = \frac{\ln(x) - \dfrac{x-1}{x}}{\ln(x)^2} = \frac{x\ln(x) - x + 1}{x\ln(x)^2}$$

3. On suit la même méthode. Pour $x > 1$, on a l'inclusion $[x, x^2] \subset]1; +\infty[$. La fonction f y étant continue, on peut considérer par théorème fondamental de l'analyse une primitive ψ. Celle-ci assure que F est bien définie sur $]1; +\infty[$ avec pour tout $x \in]1; +\infty[$: $F(x) = \psi(x^2) - \psi(x)$.
   Les mêmes arguments assurent que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ avec :
$$\forall x \in]1; +\infty[, \ F'(x) = 2x\psi'(x^2) - \psi'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$
   et comme précédemment, on déduit que F est également $\mathcal{C}^2$ sur $]1; +\infty[$ avec :
$$\forall x \in]1; +\infty[, \ F''(x) = \frac{x\ln(x) - x + 1}{x\ln(x)^2}$$
4. Soit $x > 1$. Alors pour tout $t \in [x, x^2]$ on a :
$$1 < x \leqslant t \leqslant x^2$$
   et on peut donc diviser l'inégalité par $t\ln(t) > 0$, ce qui donne :
$$\frac{x}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{x^2}{t\ln(t)}.$$
   En intégrant cette inégalité sur $[x, x^2]$, il vient bien :
$$\int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln(t)} \mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln(t)} \mathrm{d}t.$$
   Mais on a également que :
$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_x^{x^2} = \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2\ln(x)) - \ln(x) = \ln(2).$$
   Et donc par linéarité (en sortant les x et x^2 des intégrales) :
$$x\ln(2) \leqslant F(x) \leqslant x^2\ln(2)$$
   ce qui donne bien par encadrement que : $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = \ln(2)$.
5. Pour $x \in]0, 1[$, on trouve de même que :
$$\forall t \in [x^2, x], \ \frac{x}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{x^2}{t\ln(t)}.$$
   (où les inégalités s'inversent en divisant cette fois-ci par $t\ln(t) < 0$).
   En intégrant sur $[x^2, x]$ on trouve :
$$\int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln(t)} \mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln(t)} \mathrm{d}t$$
   où on a inversé les inégalités en échangeant les bornes des intégrales.
   On retrouve ainsi que pour un tel x : $x^2\ln(2) \leqslant F(x) \leqslant x\ln(2)$, ce qui donne bien que $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = \ln(2)$ par encadrement.

6. On a déjà montré que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, avec :

$$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[,\ F'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Mais, par composition et limite classique, on a :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(x)} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

et ainsi : $\lim\limits_{x\to 1} F'(x) = 1$.

Par théorème de la limite de la dérivée, et son corollaire du prolongement $\mathcal{C}^1$, on déduit que le prolongement par continuité de F est bien $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

7. Cette question vise à montrer la convexité de F sur $]0;+\infty[$:

   (a) On a montré que F est $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$: la convexité sur chacun de ces intervalles est directement donnée par le signe de F''.
   Or, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $F''(x) = \dfrac{x\ln(x) - x + 1}{x\ln(x)^2}$, qui est du signe de $x\ln(x) - x + 1$.
   La fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par produit et combinaison linéaire, de dérivée $g' : x \mapsto \ln(x)$: elle est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Elle atteint son minimum en 1, qui vaut $g(1) = 0$. Et ainsi g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Donc F'' est positive sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, ce qui prouve la convexité sur ces deux intervalles.

   (b) La fonction $\varphi : x \mapsto -|x-1|$ est bien convexe sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ (elle est affine sur ces deux intervalles).
   Elle n'est pas convexe car, avec $x = 1/2, y = 3/2, t = 1/2$ on trouve :

   $$\varphi(tx + (1-t)y) = \varphi(1) = 0 \text{ mais } t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) = -1/4 - 1/4 = -1/2$$

   et ainsi on a : $\varphi(tx + (1-t)y) > t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$. Ce qui prouve la non convexité.
   Remarque : on pouvait d'ailleurs s'en douter sans calcul : la fonction considérée est à la fois convexe et concave sur les deux ensembles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ (fonction affine). Si elle était convexe, son opposé vérifiant les mêmes hypothèses le serait aussi. Une telle fonction devrait donc être convexe et concave, donc affine, mais ce n'est pas le cas.

   (c) Par théorème de la limite monotone, on déduit que : $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ est la borne supérieure (donc un majorant) de g sur $]0;1[$. Par continuité, on a de plus : $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$. Et finalement $g(1)$ est un majorant de g sur $]0;1[$, donc sur $]0;1[$.
   Un raisonnement analogue sur $]1;+\infty[$ montre que $g(1)$ est également un minorant de g sur $[1;+\infty[$.
   Et ainsi, on déduit :

   $$\forall x \in]0;1[,\ \forall y \in]1;+\infty[,\ g(x) \leqslant g(1) \leqslant g(y).$$

   Montrons qu'alors g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leqslant b$. On procède par disjonction de cas :

   — si $a, b \in]0;1[$: par croissance de g sur $]0;1[$, on a directement $g(a) \leqslant g(b)$;
   — si $a, b \in]1;+\infty[$: par croissance de g sur $]1;+\infty[$, on a directement $g(a) \leqslant g(b)$;
   — si $b = 1$: nécessairement $a \in]0;1]$ et ainsi $g(a) \leqslant g(b)$;
   — si $a = 1$: nécessairement $b \in [1;+\infty[$ et ainsi $g(a) \leqslant g(b)$;
   — sinon : alors $a < 1 < b$ et donc $g(a) \leqslant g(1) \leqslant g(b)$ par le résultat ci-dessus, et ainsi $g(a) \leqslant g(b)$.

Et ainsi dans tous les cas : $g(a) \leqslant g(b)$. La fonction g est donc bien croissante.
Le résultat est faux si g n'est pas continue : prenons par exemple la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ \ln(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

qui est bien croissante sur $]0;1[$ (même sur $]0;1]$) et sur $]1;+\infty[$. Mais elle n'est pas croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car $g(3/4) = \dfrac{3}{4} > \ln(2) = g(2)$.
Remarque : on peut même préciser : la continuité est seulement utile en 1 (elle n'a pas été utilisée ailleurs dans la preuve).

(d) On a montré que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc F' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
La convexité sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ donnent la croissance de F' sur ces deux intervalles.
Toutes les hypothèses de la question c) sont vérifiées : la fonction F' est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc F est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

II Problème

II.1 Étude de la fonction réciproque de la fonction tanh.

1. Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ch ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ donc tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur cet intervalle.
Pour tout réel x, $(\tanh)'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}^2(x(-\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$. tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout x, $\tanh(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh x = 1$ et par imparité $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = -1$.
tanh établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $I = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x)\right[=]-1,1[$.
2. Le calcul précédent montre que pour tout réel x, $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$.
3. Soit x dans I. Alors $-x$ appartient à I.
De plus, $\tanh(\mathrm{Argth}(-x)) = -x$ et $\tanh(-\mathrm{Argth}(x)) = -\tanh(\mathrm{Argth}(x)) = -x$ car tanh ext impaire.
Comme tanh est bijective donc injective sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $\mathrm{Argth}(-x) = -\mathrm{Argth}(x)$ ce qui établit que Argth est impaire.
4. Soit y dans I et $x = \mathrm{Argth}(y)$. La fonction tanh est dérivable au point x et $\tanh'(x) = 1-\tanh^2(x) \neq 0$. Donc Argth est dérivable en y et $\mathrm{Argth}'(y) = \dfrac{1}{\tanh'(x)} = \dfrac{1}{1-\tanh^2(\mathrm{Argth}(y))} = \dfrac{1}{1-y^2}$.
5. Une décompostion en éléments simples donne pour tout x de I, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$. Par intégration, qu'il existe un réel C tel que pour tout x de I, $\mathrm{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) + C$.
Or $\tanh(0) = 0$ donc $\mathrm{Argth}(0) = 0$ ce qui donne $C = 0$.
Pour tout x de I, $\mathrm{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
6. La fonction Argth est deux-fois dérivable (même $\mathcal{C}^\infty$) sur I, avec :

$$\forall y \in I,\ \mathrm{Argth}''(y) = \frac{2y}{(1-y^2)^2}$$

qui est donc du signe de y. Et ainsi :
— sur $I_2 =]-1;0]$: Argth$''$ est négative, donc Argth y est concave ;
— sur $I_1 = [0;1[$: Argth$''$ est positive, donc Argth y est convexe.

II.2 Etude d'une équation différentielle

7. La fonction $x \mapsto x$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,1[$ donc la solution générale de $xy' + 3y = 0$ est de la forme $x \mapsto Ce^{\Phi(x)}$ où Φ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{3}{x}$ sur $]0,1[$. Prenons $\Phi : x \mapsto -3\ln x$.
La solution générale de $xy' + 3y = 0$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{C}{x^3}$.
Cherchons une solution particulière y_0 de (E) de la forme $y_0(x) = \dfrac{z(x)}{x^3}$. y_0 est solution de (E) sur $]0,1[$ si et seulement si pour tout x de $]0,1[$, $x\dfrac{z'(x)}{x^3} - 3x\dfrac{z(x)}{x^4} + 3\dfrac{z(x)}{x^3} = \dfrac{1}{1-x^2}$ ce qui équivaut à pour tout x de $]0,1[$, $z'(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x^2} - 1$. Prenons z définie par $z(x) = \mathrm{Argth}(x) - x$.
On obtient alors la solution générale de (E) de la forme :
$$x \mapsto \frac{\mathrm{Argth}(x) - x + C}{x^3}\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

II.3 Étude d'une équation fonctionnelle

8. Si il existe un réel C tel que pour tout réel x, $f(x) = C$, f étant solution du problème posé, alors C vérifie $C = \dfrac{2C}{1+C^2}$ ce qui équivaut à $C(C^2-1) = 0$ soit $C = 0$ ou $C = 1$ ou $C = -1$.
9. Si f est solution, $f(0)$ vérifie $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$ ce qui donne comme à la question précédente $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.
10. Pour tout réel x, $1 - |f(x)| = 1 - \dfrac{2a}{1+a^2} = \dfrac{(1-a)^2}{1+a^2}$ où $a = \left|f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$.
Ainsi pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant 1$ soit $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
11. Supposons que f soit solution. Alors, pour tout réel x :
$$(-f)(2x) = -f(2x) = -\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2}$$
ce qui montre que $-f$ est aussi solution.
12. Pour tout réel x :
$$\begin{aligned}\frac{2\tanh(x)}{1+(\tanh(x))^2} &= \frac{2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{ch}(x))^2+(\mathrm{sh}(x))^2} = \frac{2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)}{2(\mathrm{ch}(x))^2-1}\\ &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2-2} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \tanh(2x)\end{aligned}$$
ce qui montre que tanh est solution du problème posé.
13. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$. Or f est dérivable donc continue en 0 donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.
Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
14. Pour tout entier n, $u_n = f\left(2\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.
Comme pour tout n, $1 + u_{n+1}^2 > 0$, u_{n+1} et u_n ont toujours le même signe donc pour tout entier n, u_n a le signe de u_0. D'autre part pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n+1}(u_{n+1}^2) - 1}{1+u_{n+1}^2}$.
Puisque pour tout x, $f^2(x) \leqslant 1$, on en déduit que pour tout n, $u_{n+1}^2 - 1 \leqslant 0$ et que $(u_{n+1} - u_n)u_{n+1} \leqslant 0$.
Ainsi si $u_0 \geqslant 0$ la suite u est décroissante et si $u_0 \leqslant 0$ la suite u est croissante.

15. Comme $f(x_0) \neq f(0)$, u_0 appartient à $[-1, 1[$. Distinguons deux cas :
Si u_0 est négatif, alors tous les termes de la suite u sont négatifs et la suite u ne peut converger vers 1.
Si u_0 appartient à $[0, 1[$, la suite u est décroissante et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_0 < 1$ ce qui conduit à $1 < 1$.
Contradiction.
16. Si $f(0) = -1$, alors $g = -f$ est une solution du problème posé qui vérifie $g(0) = 1$ ce qui est impossible d'après la question précédente.
17. On déduit des questions précédentes qu'il n'existe pas de fonctions non constantes solution du problème posé qui vérifie $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.
18. Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$.
Soit v la suite définie par son terme général $v_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.
On démontre comme à la question **13.** que v converge vers $f(0) = 0$.
Le calcul effectué à la question **14.** montre que la suite v est constante égale à $v_0 = 1$ et ne peut donc pas converger vers 0.
De manière analogue, il est impossible qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = -1$. Ainsi, pour tout réel x, $-1 < f(x) < 1$.
19. En utilisant l'expression de Argth trouvée au **5.**, on a pour tout réel x :

$$g(2x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(2x)}{1-f(2x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^2\right) = 2\mathrm{Argth}(f(x)) = 2g(x)$$

20. La fonction f est dérivable en 0. La fonction Argth est dérivable sur $]-1, 1[$ donc en $f(0) = 0$. Par composition, la fonction g est dérivable en 0.
21. Soit x réel non nul. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$. Or g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$ donc $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{g(u)}{u} = g'(0)$.
Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = g'(0)$.
22. Pour tout entier n, $v_n = \dfrac{g\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\frac{x}{2^{n+1}}} = \dfrac{g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} = v_{n+1}$ car $g(2b) = 2g(b)$ d'après la question **19.**.
La suite v est donc constante égale à $v_0 = \dfrac{g(x)}{x}$. Or elle converge vers $g'(0)$.
Ainsi pour tout réel x non nul ,$g(x) = g'(0)x$ relation qui est encore valable pour $x = 0$: g est donc linéaire.
23. Si f est solution du problème posé :
    - Si $f(0) = 1$ d'après la question **17.**, f est constante égale à 1.
    - Si $f(0) = -1$ d'après la question **17.**, f est constante égale à -1.
    - Si $f(0) = 0$ d'après la question **22.**, il existe un réel c tel que pour tout réel x, $\mathrm{Argth}(f(x)) = cx$ ce qui donne $f(x) = \tanh(cx)$. La question **12.** assure que les fonctions de ce type sont bien solutions.