DS n^{o}7

I Exercices

Exercice 1

1. (a) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, justifier que la fonction $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ est infiniment dérivable, et donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de $f^{(n)}$.

   On considère pour la suite de la question $n \in \mathbb{N}$ et on note $\alpha = a + ib$ (forme algébrique) une racine n-ème de l'unité.

   (b) Rappelez, sous forme exponentielle, les valeurs possibles de α.

   (c) Justifier que $g : x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ est infiniment dérivable, et donner une expression simple pour $g^{(n)}$.

2. On considère $P = X^4 - 8X^3 + 16X^2 + 9$:

   (a) Donner la décomposition de $Q = X^4 - 8X^3 + 16X^2$ en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Donner sous forme algébriques les racines carrées de $16 + 12i$ et $16 - 12i$.

   (c) En déduire les racines de P (sur $\mathbb{C}$), puis sa décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$, puis sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 Soient f, g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On souhaite montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que : $f(x_0) = g(x_0)$.

On notera pour la suite pour $k \in \mathbb{N}^*$: $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et $g^k = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{k \text{ fois}}$.

On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'un tel x_0 n'existe pas.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $f \circ g^k = g^k \circ f$.
2. Montrer que $f - g$ est de signe constant. On supposera pour la suite que $f - g$ est positive.
3. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que :
$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) \geqslant m + g(x).$$
4. En déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\ f^k(x) \geqslant km + g^k(x).$$
5. Conclure.

Exercice 3 On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et on pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est continue sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
2. On s'intéresse ici à la définition et à la régularité de F sur $]0; 1[$:

   (a) Soit $x \in]0; 1[$. Justifier que l'on a l'inclusion $[x^2, x] \subset]0; 1[$.

   (b) On note φ une primitive de f sur $]0; 1[$: justifier que φ existe bien, et en déduire que F est bien définie sur $]0; 1[$ avec : $\forall x \in]0; 1[,\ F(x) = \varphi(x^2) - \varphi(x)$.

   (c) En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; 1[$, et donner F' et F'' sur $]0; 1[$.

3. En adaptant le raisonnement précédent, montrer que F est également définie sur $]1; +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$ et donner F' et F'' sur cet intervalle.

4. Soit $x > 1$. Montrer que l'on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln(t)}\mathrm{d}t.$$

   En déduire que : $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \ln(2)$.

5. En raisonnant de manière analogue, montrer de même que $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \ln(2)$.
6. Montrer que le prolongement par continuité de F ainsi construit est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
7. Cette question vise à montrer la convexité de F sur $]0;+\infty[$:
   (a) Montrer que F est convexe sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
   (b) Existe-t-il une fonction continue sur $]0;+\infty[$, convexe sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, sans être pour autant convexe sur $]0;+\infty[$?
   (c) Soit g une fonction continue sur $]0;+\infty[$, supposée croissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. Montrer que g est croissante sur $]0;+\infty[$. Le résultat reste-t-il valable si g n'est pas supposée continue ?
   (d) En déduire que le prolongement de F sur $\mathbb{R}_+^*$ est convexe.

II Problème

II.1 Étude de la fonction réciproque de la fonction tanh.

On notera respectivement cosh, sinh et tanh les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
   On note Argth (appelée “argument tangente hyperbolique”) sa bijection réciproque.
2. Justifier que tanh est infiniment dérivable, et calculer sa dérivée en l'exprimant en fonction de tanh.
3. Donner la parité des fonctions tanh et Argth.
4. Démontrer que Argth est infiniment dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer Argth à l'aide de fonctions usuelles.
6. Étudier la convexité de la fonction Argth. On donnera l'intervalle I_1 (respectivement I_2) le plus grand possible sur lequel la fonction Argth est convexe (respectivement concave).

II.2 Etude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) : $x\,y' + 3\,y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

7. Résoudre (E) sur l'intervalle $J =]0, 1[$.

II.3 Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
“déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

8. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
9. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
10. Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
    Indication : on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
11. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
12. Montrer que tanh est solution du problème posé.
    Dans les questions **13.** à **17.**, on suppose que f **est une solution du problème posé, que** $f(0) = 1$ **et que** f **n'est pas constante.**
    On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.
13. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
14. Établir une relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.
15. En utilisant les résultats des questions **13.** et **14.**, aboutir à une contradiction.
16. Que peut-on dire si l'hypothèse “$f(0) = 1$” est remplacée par l'hypothèse ”$f(0) = -1$” ?

17. Conclure.

    Dans les questions **18.** à **22.**, on suppose que f **est une solution du problème posé et que** $f(0) = 0$**.**

18. En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions **13.** à **17.**, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1 \text{ et } f(x) \neq -1.$$

    On définit alors la fonction g par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \operatorname{Argth}(f(x)).$$

19. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2\,g(x)$.
20. Montrer que g est dérivable en 0.
21. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

    Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.
22. En déduire que g est linéaire.
23. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.