

DS n°6

I Exercices

Exercice 1

1. Par définition, on a déjà que F est un sev : c'est le sev engendré par u_0 .

Pour G :

- avec $x = y = z = t = 0$, on a bien $x + y = 0 = z + t$, donc $(0, 0, 0, 0) \in G$ et ainsi $G \neq \emptyset$;
- soient $u, v \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$. Posons $w = \lambda u + \mu v$. Alors : $w = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)$. Mais on a, comme $u, v \in G$:

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2) = \lambda(t_1 + z_1) + \mu(t_2 + z_2) = (\lambda z_1 + \mu z_2) + (\lambda t_1 + \mu t_2)$$

ce qui prouve que $w \in G$.

Et finalement G est bien un sev de E .

2. Pour montrer que F et G sont en somme directe, il suffit de montrer que $F \cap G = \{0\}$ (et même seulement $F \cap G \subset \{0\}$). Soit $u \in F \cap G$. Alors :

- comme $u \in F = \text{Vect}(u_0)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $u = \lambda u_0 = (\lambda, \lambda, 0, 0)$;
- comme $u \in G$: $2\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$;

et finalement $u = 0$: les espaces F et G sont bien en somme directe.

3. Avec les mêmes notations, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$u - \lambda u_0 = (x - \lambda, y - \lambda, z, t)$$

et donc :

$$u - \lambda u_0 \in G \Leftrightarrow x - \lambda + y - \lambda = z + t \Leftrightarrow \lambda = \frac{x + y - z - t}{2}$$

ce qui montre bien l'existence d'un tel λ .

4. Comme on a déjà montré que F et G sont en somme directe, il reste à prouver que $E = F + G$ (et même seulement $E \subset F + G$).

Soit $u \in E$. Notons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u - \lambda u_0 \in G$. Alors :

$$u = \underbrace{\lambda u_0}_{\in F} + \underbrace{u - \lambda u_0}_{\in G} \in F + G$$

Et finalement : $E = F \oplus G$, c'est-à-dire que les espaces F et G sont supplémentaires.

5. D'après la question 3, on a $\lambda = \frac{1 + 3 - 5 - 7}{2} = -4$.

Et la décomposition est : $(1, 3, 5, 7) = \underbrace{(-4, -4, 0, 0)}_{=4u_0 \in F} + \underbrace{(5, 7, 5, 7)}_{\in G}$.

Exercice 2

1. La fonction f_n est définie sur \mathbb{R}_+^* à cause du \ln qui apparaît dans son expression.

2. Notons déjà que, si $x \in]0; 1]$, on a : $\ln(x) \leq 0$ et $x^n > 0$. Par produit, il vient : $f_n(x) \leq 0$, et donc $f_n(x) \neq 1$.

L'équation $f_n(x) = 1$ n'a donc pas de solution sur $]0; 1]$.

Sur $[1; +\infty[$, la fonction f_n est continue (en tant que produit de fonctions continues), et même dérivable (en tant que produit de fonctions dérivables). Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in [1; +\infty[, f'_n(x) = nx^{n-1}\ln(x) + x^n \cdot \frac{1}{x} = x^{n-1} \cdot (n\ln(x) + 1) > 0$$

donc f_n est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

On a $f_n(1) = 0$, et par limite d'un produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Par théorème de la bijection continue, la fonction f_n réalise une bijection strictement croissante de $[1; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$.

Et donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans $[1; +\infty[$.

Comme $f_n(1) = 0$, on a même $x_n \in]1; +\infty$, c'est-à-dire $x_n > 1$.

3. Par croissance de la fonction f_n , pour montrer que (x_n) est strictement décroissante, il suffit de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$.

Mais on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n \ln(x_{n+1}) = \frac{x_{n+1}^{n+1} \ln(x_{n+1})}{x_{n+1}} = \frac{f_{n+1}(x_{n+1})}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_{n+1}} < 1 = f_n(x_n)$$

en utilisant que $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$, et que $x_{n+1} > 1$.

Ce qui prouve bien le résultat voulu.

Donc (x_n) est strictement décroissante.

4. En tant que suite décroissante minorée (par 1), la suite (x_n) est donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell \in [1; +\infty[$.

5. Supposons par l'absurde que $\ell \neq 1$. Comme on a déjà que $\ell \in [1; +\infty[$, on a donc : $\ell > 1$.

Par décroissance de la suite (x_n) , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq \ell$$

et donc : $f_n(x_n) = x_n^n \ln(x_n) \geq \ell^n \ln(\ell)$.

Comme $\ell > 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n = +\infty$ et $\ln(\ell) > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n \ln(\ell) = +\infty$.

Par encadrement, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = +\infty$.

Mais la suite $(f_n(x_n))$ est constante de valeur 1.

D'où la contradiction.

Donc $\ell = 1$.

Remarque : au lieu de faire une minoration, on pouvait aussi voir par calcul direct que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = +\infty$ (le fait que $\ell > 1$ assure qu'il n'y a pas de forme indéterminée).

6. (a) Comme (u_n) tend vers $+\infty$, pour n suffisamment grand on a $u_n > 1$ et $v_n \ln(v_n) > 1$. Ceci assure que les quantités $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n \ln(v_n))$ sont bien définies et non nulles pour n suffisamment grand. Pour un tel n , on a :

$$\frac{\ln(v_n \ln(v_n))}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(v_n \ln(v_n)) - \ln(u_n) + \ln(u_n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln\left(\frac{v_n \ln(v_n)}{u_n}\right)}{\ln(u_n)} + 1$$

Mais on a par hypothèse que :

- $u_n \sim v_n \ln(v_n)$, donc $\frac{v_n \ln(v_n)}{u_n}$ tend vers 1, et par composition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{v_n \ln(v_n)}{u_n}\right) = 0$;
- u_n tend vers $+\infty$, et par composition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = +\infty$.

Par quotient, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{v_n \ln(v_n)}{u_n}\right)}{\ln(u_n)} = 0$.

Et finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n \ln(v_n))}{\ln(u_n)} = 1.$$

Ce qui traduit bien que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n \ln(v_n))$.

(b) Posons g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g : x \mapsto x \ln(x) - x^2$.

Alors g est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \ln(x) + 1 - 2x.$$

Mais par inégalité classique (de convexité) on a pour tout $x \in]0; +\infty[$: $\ln(x) - x + 1 \leq 0$. Et donc : $g'(x) = \ln(x) - x + 1 - x \leq -x < 0$.

Ainsi la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Mais on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ (par limite classique). Et donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

Ceci assure que :

$$\forall x > 0, g(x) < 0$$

ce qui donne :

$$\forall x > 0, x \ln(x) - x^2 < 0$$

et on retrouve bien l'inégalité demandée.

Les équivalents préservent les limites : comme u_n tend vers $+\infty$ et que $v_n \ln(v_n) \sim u_n$, on déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \ln(v_n) = +\infty$.

Il vient par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^2 = +\infty$, comme pour tout entier naturel n on a : $v_n^2 > v_n \ln(v_n)$.

En composant avec la fonction racine carrée, on trouve bien que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

(c) Pour n suffisamment grand pour que $\ln(v_n) > 0$, on a :

$$\ln(v_n \ln(v_n)) = \ln(v_n) + \ln(\ln(v_n)).$$

Mais on vient de montrer que v_n tend vers $+\infty$. Par composition, $\ln(v_n)$ tend aussi vers $+\infty$. Par croissances comparées, il vient donc :

$$\ln(\ln(v_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(v_n))$$

et donc :

$$\ln(v_n \ln(v_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(v_n) + o(\ln(v_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$$

ce qui est le résultat demandé.

Comme on a déjà vu que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n \ln(v_n))$, on déduit par transitivité que : $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

(d) Par quotient, on a déjà :

$$v_n \sim \frac{u_n}{\ln(v_n)}.$$

Et avec la question précédente on a : $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$. Ce qui donne bien :

$$v_n \sim \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 = f_n(x_n) = x_n^n \ln(x_n)$.

En appliquant la fonction \ln , il vient :

$$0 = n \ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)).$$

Et finalement :

$$n = -\frac{\ln(\ln(x_n))}{\ln(x_n)} = \frac{1}{\ln(x_n)} \ln\left(\frac{1}{\ln(x_n)}\right).$$

8. Posons $(u_n) = (n)$ et $(v_n) = \left(\frac{1}{\ln(x_n)}\right)$. Alors on est dans le même cadre que la question 6. On a

$$\text{donc : } \frac{1}{\ln(x_n)} \sim \frac{n}{\ln(n)}.$$

9. Notons déjà que, comme x_n tend vers 1, $(x_n - 1)$ tend vers 0.

On a aussi : $\ln(x_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$ (par la question précédente, en passant à l'inverse dans l'équivalent).

Mais on a :

$$\ln(x_n) = \ln(1 + (x_n - 1)) \sim x_n - 1$$

en utilisant que $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

Et finalement :

$$x_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Remarque : par croissances comparées, on trouve bien que $x_n - 1$ tend vers 0, ce qui est cohérent avec les résultats déjà montrés.

II Problème

II.1 Structure de E

1. On utilise directement les expressions de $M(0, 1)$ et $M(1, 0)$. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Montrons directement que $E = \text{Vect}(A, B)$, ce qui prouvera les deux parties de la questions.

On a par définition pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = xA + yB$$

ce qui assure que :

$$E = \{M(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{xA + yB \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(A, B).$$

3. Les matrices A et B ne sont pas proportionnelles (on peut voir qu'elles des 0 en des coordonnées différentes) : en tant que famille à deux vecteurs, cela assure que la famille (A, B) est libre.

4. On déduit que la famille (A, B) engendre E et est libre : c'est une base de E .

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a vu que $M(x, y) = xA + yB$: ainsi les coordonnées de $M(x, y)$ dans la base (A, B) sont (x, y) .

5. (a) Raisonnons dans la base (A, B) . Pour $\lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda M(a, b) + \mu M(c, d) = (\lambda a + \mu c)A + (\lambda b + \mu d)B \text{ et } M(x, y) = xA + yB$$

et par unicité de l'écriture (comme (A, B) est libre) :

$$\lambda M(a, b) + \mu M(c, d) = M(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a + \mu c = x \\ \lambda b + \mu d = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui donne bien l'équivalence demandée.

(b) Par définition, la famille $(M(a, b), M(c, d))$ est une base de E si, et seulement si, tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $M(a, b)$ et $M(c, d)$. Cela veut dire que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, l'équation (d'inconnues $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) $\lambda M(a, b) + \mu M(c, d) = M(x, y)$ admet une unique solution.

Par la question précédente, c'est équivalent au fait que l'équation $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ possède une unique solution.

Or, c'est le cas si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible.

Et finalement la famille $(M(a, b), M(c, d))$ est une base si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible. Et c'est le cas si, et seulement si : $ad - bc \neq 0$ (condition pour qu'un système linéaire 2×2 admette une unique solution).

II.2 Réduction des éléments de E

6. On échelonne P . On trouve que P est bien inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Un calcul direct donne :

$$D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Posons $D(x, y) = P^{-1}M(x, y)P$. Il suffit de montrer que $D(x, y)$ ainsi définie est diagonale.

Or, on a : $M(x, y) = xA + yB$. Par bilinéarité de la multiplication matricielle (distributivité à gauche et à droite) :

$$D(x, y) = P^{-1}(xA + yB)P = (xP^{-1}AP) + (yP^{-1}BP) = xD_A + yD_B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$$

et donc $D(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$ convient, et est bien diagonale.

9. Comme P et P^{-1} sont inversibles, la matrice $M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$ est inversible si, et seulement si, $D(x, y)$ est inversible.

Or, en tant que matrice diagonale, $D(x, y)$ est inversible si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Donc $M(x, y)$ est inversible si, et seulement si :

$$x \neq 0, \quad y \neq 2x \text{ et } y \neq 3x.$$

Par inverse d'une matrice diagonale, sous ces conditions, on a :

$$D(x, y)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2x-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3x-y} \end{pmatrix}.$$

Par inverse d'un produit, pour de tels x, y :

$$M(x, y)^{-1} = (PD(x, y)P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D(x, y)^{-1}P^{-1} = PD(x, y)^{-1}P^{-1}.$$

Au passage, on trouve bien que A est inversible, cohérent avec le fait que D_A est inversible, et que B n'est pas inversible, cohérent avec le fait que D_B ne l'est pas non plus.

10. (a) Par définition de D_B :

$$B^2 = (PD_B P^{-1})^2 = PD_B^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PD(0, -1)P^{-1} = M(0, -1)$$

et donc $B^2 \in E$ (et même on vient de montrer que $B^2 = -B$, qui est donc dans E comme c'est un espace vectoriel).

(b) De même avec D_A :

$$A^2 = (PD_A P^{-1})^2 = PD_A^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et, pour montrer que ce n'est pas un élément de E , il suffit de voir que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas de

la forme $D(x, y)$. Pour cela, on résout l'équation $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D(x, y)$ (d'inconnues x, y). On

a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x \\ 4 = 2x - y \\ 9 = 3x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ y = -6 \end{cases}$$

qui n'a pas de solution.

Et ainsi : $A^2 \notin E$.

(c) Les matrices D_A et D_B sont diagonales, donc commutent. On déduit que :

$$AB = PD_A P^{-1} PD_B P^{-1} = PD_A D_B P^{-1} = PD_B D_A P^{-1} = PD_B P^{-1} PD_A P^{-1} = BA.$$

donc A et B commutent.

II.3 Application à l'étude de suites

11. On a par définition :

$$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, par relation de récurrence satisfaite par les suites :

$$a_1 = 3a_0 + 4b_0 - c_0 = 3, \quad b_1 = -4a_0 - 5b_0 + c_0 = -4 \text{ et } c_1 = -6a_0 - 8b_0 + 2c_0 = -6$$

et donc :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

12. Par définition, on a pour tout $x \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n - c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = CX_n$$

où $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} = M(1, 3) \in E$ (donc $x = 1$ et $y = 3$ conviennent).

13. On procède par récurrence :

- pour $n = 0$: par définition, $C^0 = I_3$, et on a bien $X_0 = I_3 X_0$;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = C^n X_0$. Alors :

$$X_{n+1} = CX_n = C \cdot C^n X_0 = C^{n+1} X_0$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

14. Par calcul direct, on a :

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. On a :

$$C = M(1, 3) = PD(1, 3)P^{-1}$$

et en passant à la puissance n , pour $n \in \mathbb{N}$, les facteurs $P^{-1}P$ du produit matriciels disparaissent, ce qui donne :

$$C^n = PD(1, 3)^n P^{-1}.$$

Mais, d'après l'expression de $D(x, y)$, on a : $D(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $D(1, 3)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En réinjectant, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$C^n = \begin{cases} C & \text{si } n \text{ impair} \\ C^2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot (-1)^n & 2 - 2 \cdot (-1)^n & -1 \\ -1 + 3 \cdot (-1)^n & -2 + 3 \cdot (-1)^n & 1 \\ -2 + 4 \cdot (-1)^n & -4 + 4 \cdot (-1)^n & 2 \end{pmatrix}$$

Et par la question précédente :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = X_n = C^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot (-1)^n \\ -1 + 3 \cdot (-1)^n \\ -2 + 4 \cdot (-1)^n \end{pmatrix}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = 1 - 2 \cdot (-1)^n, \quad b_n = -1 + 3 \cdot (-1)^n, \quad c_n = -2 + 4 \cdot (-1)^n.$$

les formules n'étant pas valables pour $n = 0$ (au même titre que l'expression précédente de C^n pour $n = 0$).

II.4 Application à l'étude d'un système d'équations différentielles

Remarque : petit cadeau à cette question comme on donne en fait l'expression de P^{-1} dans l'énoncé.

16. Soient f_1, f_2, f_3 constantes de valeurs respectives $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors elles sont solution du système (S) si, et seulement si :

$$\begin{cases} 0 &= 3x + 2y \\ 0 &= -3x - 2y \\ 0 &= -4x - 4y + z \end{cases}$$

c'est-à-dire si, et seulement si (par pivot par exemple) : $x = -z/2$ et $y = 3z/4$.

Et donc les solutions forment l'ensemble $\{(-z/2, 3z/4, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1/2, 3/4, 1)) = \text{Vect}((-2, 3, 4))$.

Et finalement, les solutions constantes sont les fonctions de la forme :

$$f_1 : x \mapsto -2\lambda, \quad f_2 : x \mapsto 3\lambda, \quad f_3 : x \mapsto 4\lambda$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

17. On montre séparément les deux implications :

— si les f_i sont dérivables : chacune des fonctions g_1, g_2, g_3 est combinaison linéaire des fonctions f_1, f_2, f_3 , qui sont dérivables ; par linéarité de la dérivation, les fonctions g_i sont bien dérivables ;

— si les g_i sont dérivables : on a $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f_1(x) &= g_1(x) - 2g_2(x) + g_3(x) \\ f_2(x) &= -g_1(x) + 3g_2(x) - g_3(x) \\ f_3(x) &= -2g_1(x) + 4g_2(x) - g_3(x) \end{cases} .$$

Et donc les f_i sont chacune combinaison linéaire en les g_i : à nouveau par linéarité, les f_i sont dérivables.

On a donc bien l'équivalence demandée.

18. Écrivons tout matriciellement. Notons déjà que, par la question précédente, comme les fonctions f_1, f_2, f_3 sont dérivables si, et seulement si, les fonctions g_1, g_2, g_3 le sont, il suffit de considérer $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ dérivables telles que $G = P^{-1}F$.

On reconnaît l'écriture matricielle pour (S) : $F' = M(1, 2) \cdot F$. Et ainsi :

$$F \text{ solution de } (S) \Leftrightarrow F' = M(1, 2)F \Leftrightarrow P^{-1}F' = P^{-1}M(1, 2)PP^{-1}F \Leftrightarrow G' = D(1, 2)G$$

où l'équivalence au milieu vient de l'inversibilité de P et de P^{-1} (donc multiplier, à gauche ou à droite, par l'une des deux préserve l'équivalence).

La dernière équation matricielle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

qui est bien de la forme voulue, avec $\alpha = \gamma = 1$ et $\beta = 0$.

19. On résout séparément chaque équation de (S') . On a à chaque fois une équation différentielle linéaire homogène du premier degré à coefficients constants. On trouve que (g_1, g_2, g_3) est solution de (S') si, et seulement si, il existe des réels λ, μ, ν (unique, déterminés entièrement par les conditions initiales, comme on le verra après) tels que :

$$g_1 : x \mapsto \lambda e^x, \quad g_2 : x \mapsto \mu \text{ et } g_3 : x \mapsto \nu e^x.$$

Comme $F = PG$, on déduit que (f_1, f_2, f_3) est solution de (S) si, et seulement si, il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} f_1 : x \mapsto g_1(x) - 2g_2(x) + g_3(x) = (\lambda + \nu)e^x - 2\mu \\ f_2 : x \mapsto -g_1(x) + 3g_2(x) - g_3(x) = (-\lambda - \nu)e^x + 3\mu \\ f_3 : x \mapsto -2g_1(x) + 4g_2(x) - g_3(x) = (-2\lambda - \nu)e^x + 4\mu \end{cases}$$

20. Des solutions de (S) vérifient cette condition initiale si, et seulement si, les réels λ, μ, ν correspondants vérifient :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \\ f_3(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \nu)e^{x_0} - 2\mu \\ (-\lambda - \nu)e^{x_0} + 3\mu \\ (-2\lambda - \nu)e^{x_0} + 4\mu \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda e^{x_0} \\ \mu \\ \nu e^{x_0} \end{pmatrix}$$

et par inversibilité de P , on trouve directement que le système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} \lambda e^{x_0} \\ \mu \\ \nu e^{x_0} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

d'où l'unicité de λ, μ, ν , car l'unique solution avec condition initiale est donnée par :

$$\lambda = a'e^{-x_0}, \quad \mu = b' \quad \text{et} \quad \nu = c'e^{-x_0}.$$

21. D'après la question 19, on a directement que les solutions de (S) forment l'ensemble \mathcal{F} suivant :

$$\mathcal{F} = \left\{ x \mapsto \begin{pmatrix} (\lambda + \nu)e^x - 2\mu \\ (-\lambda - \nu)e^x + 3\mu \\ (-2\lambda - \nu)e^x + 4\mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(F_1, F_2, F_3)$$

où :

$$F_1 : x \mapsto \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \\ -2e^x \end{pmatrix}, \quad F_2 : x \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_3 : x \mapsto \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \\ -2e^x \end{pmatrix}$$

Cette écriture assure que \mathcal{F} est un espace vectoriel, et qu'il est engendré par la famille (F_1, F_2, F_3) . L'unicité prouvée à la question précédente assure que la famille (F_1, F_2, F_3) est libre.

Et ainsi : \mathcal{F} est un espace vectoriel, et (F_1, F_2, F_3) en est une base.

Remarque : on trouve au passage que l'ensemble des solutions constantes trouvé en question 16 est $\text{Vect}(F_2)$, qui est un sev de \mathcal{F} (c'est même une droite vectorielle).