DS n^{o}6

I Exercices

Exercice 1

On considère $E = \mathbb{R}^4$. On note $u_0 = (1, 1, 0, 0)$ et on pose :

$$F = \mathrm{Vect}(u_0) \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \in E \,|\, x + y = z + t\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $u = (x, y, z, t) \in E$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u - \lambda u_0 \in G$.
   Remarque : on donnera explicitement λ en fonction de x, y, z, t.
4. Déduire des questions précédentes que F et G sont supplémentaires.
5. Donner la décomposition de $(1, 3, 5, 7)$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, qu'on notera x_n, et que $x_n > 1$.
   Indication : on pourra commencer par montrer qu'il n'y a pas de solution dans $]0; 1]$.
   Ceci définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Montrer que la suite (x_n) ainsi définie est strictement décroissante.
4. En déduire que (x_n) converge vers une limite ℓ, et donner un encadrement de ℓ sans effectuer de calcul supplémentaire.
5. Montrer que $\ell = 1$.
   Indication : on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.
   Remarque : la question qui suit est plus difficile. Même sans l'avoir démontré, on pourra admettre son résultat et l'utiliser pour la suite de l'exercice.
6. On considère pour cette question deux suites (u_n) et (v_n) à termes positifs telles que $u_n \sim v_n \ln(v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On souhaite en déduire un équivalent de v_n en fonction de u_n.
   (a) Justifier que, à partir d'un certain rang, les suites de terme général $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n \ln(v_n))$ sont bien définies, et que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n \ln(v_n))$.
   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $x \ln(x) < x^2$. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   (c) En déduire que $\ln(v_n) \sim \ln(v_n \ln(v_n))$, puis que : $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
   (d) En déduire que : $v_n \sim \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n \ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) = 0$. En déduire que $n = \dfrac{1}{\ln(x_n)} \ln\left(\dfrac{1}{\ln(x_n)}\right)$.
8. En s'aidant des deux questions précédentes, montrer que $\dfrac{1}{\ln(x_n)} \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$.
9. En déduire un équivalent de $x_n - 1$.

II Problème

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ comme :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

On pose également $A = M(1, 0)$, $B = M(0, 1)$ et $E = \{M(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$.

II.1 Structure de E

1. Expliciter les matrices A et B.
2. Montrer que E est un espace vectoriel, et qu'il est engendré par les matrices A et B.
3. Montrer que la famille (A, B) est libre.
4. En déduire que (A, B) est une base de E, et donner les coordonnées de la matrice $M(x, y)$, pour $x, y \in \mathbb{R}$, dans cette base.
5. On fixe pour cette question $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et on cherche une condition pour que la famille $(M(a, b), M(c, d))$ soit une base de E.
   (a) Soient $\lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on a l'équivalence :

   $$\lambda M(a,b) + \mu M(c,d) = M(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Indication : on pourra utiliser judicieusement les coordonnées des éléments de E dans la base (A, B).

   (b) Conclure.

II.2 Réduction des éléments de E

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
   Attention : l'expression de P^{-1} étant utile pour la suite, on vérifiera bien les calculs effectués.
7. On pose $D_A = P^{-1}AP$ et $D_B = P^{-1}BP$. Donner les expressions de D_A et D_B.
8. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ telle que :

   $$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$

9. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $x, y \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $M(x, y)$ soit inversible, et donner alors une expression de $M(x, y)^{-1}$ à l'aide de P, P^{-1} et $D(x, y)^{-1}$.
   Remarque : on vérifiera bien que cette condition est cohérente avec l'inversibilité ou non de A et de B.
10. En déduire également, avec peu de calculs, les réponses aux questions suivantes, qu'il faudra justifier soigneusement :
    (a) La matrice B^2 est-elle un élément de E ?
    (b) La matrice A^2 est-elle un élément de E ?
    (c) Les matrices A et B commutent-elles ?

II.3 Application à l'étude de suites

On considère ici trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} & = & -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} & = & -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{array} \right. .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

11. Déterminer X_0 et calculer X_1.
12. Montrer qu'il existe une matrice $C \in E$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = CX_n$$
en précisant bien les deux réels x, y tels que $C = M(x, y)$.
13. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = C^n X_0.$$
14. Calculer C^2.
15. À l'aide de la partie précédente, donner une expression de C^n puis de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

II.4 Application à l'étude d'un système d'équations différentielles

On considère ici le système différentiel :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} f_1' & = & 3f_1 + 2f_2 \\ f_2' & = & -3f_1 - 2f_2 \\ f_3' & = & -4f_1 - 4f_2 + f_3 \end{array} \right. .$$

où f_1, f_2, f_3, fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, sont les inconnues.

On pose $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ et $F' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix}$. On définit les fonctions g_1, g_2, g_3 dérivables par :

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} g_1(x) & = & f_1(x) + 2f_2(x) - f_3(x) \\ g_2(x) & = & f_1(x) + f_2(x) \\ g_3(x) & = & 2f_1(x) + f_3(x) \end{array} \right. .$$

16. Trouver toutes les solutions constantes du système (S) (c'est-à-dire les fonctions constantes f_1, f_2, f_3 qui vérifient bien le système (S)).
17. Avec les notations précédentes, montrer que g_1, g_2, g_3 sont dérivables si, et seulement si, f_1, f_2, f_3 le sont.
Remarque : pour la réciproque, on pourra commencer par exprimer f_1, f_2, f_3 à l'aide de g_1, g_2, g_3.
18. Montrer que f_1, f_2, f_3 sont solutions du système différentiel (S) si, et seulement si, les fonctions g_1, g_2, g_3 sont solution du système différentiel :
$$(S') : \left\{ \begin{array}{rcl} g_1' & = & \alpha g_1 \\ g_2' & = & \beta g_2 \\ g_3' & = & \gamma g_3 \end{array} \right.$$
avec α, β, γ des réels que l'on donnera explicitement.

19. Résoudre le système (S') puis en déduire les solutions de (S).
20. Montrer que soient $x_0, a, b, c \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution (f_1, f_2, f_3) de (S) telle que :

$$(f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0)) = (a, b, c).$$

21. Étant données f_1, f_2, f_3 qui forment une solution de (S), on l'assimile à la fonction :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \end{array} \right. .$$

Montrer que l'ensemble des solutions ainsi représenté est un espace vectoriel, et en donner une base.