DS n^{o}5

I Exercices

Exercice 1 [Proche du cours]

1. (a) $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par 1) et $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en $+\infty$. Comme produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0, u_n tend vers 0 en l'infini.

   (b) Il s'agit d'une forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$. Deux possibilités : soit on multiplie et on divise par la quantité conjuguée, ce qui lève l'indétermination, soit on factorise par le terme prépondérant :
$$v_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$$
   et en composant l'équivalent de référence $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, avec $\alpha = 1/2$, à droite par $1/n$ (qui tend bien vers 0), on obtient
$$v_n \sim \sqrt{n}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
   Par équivalence, v_n tend donc vers 0.

2. Le polynôme caractéristique est $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$. Ainsi, il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$. La résolution du système linéaire obtenu en évaluant en $n = 0$ et $n = 1$ donne $\lambda = -1, \mu = 1$, et finalement :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n - 2^n$$

3. Soit n, m deux entiers relatifs. On suppose que $f(n) = f(m)$. Si n est pair et m impair, $f(n) = n+1$ est impair et $f(m) = f(n) = m-1$ est également pair : c'est impossible. De même, n ne peut être impair et m pair.
   Supposons maintenant n et m impairs : alors $f(n) = n-1 = m-1 = f(m)$, donc $n = m$. De même, si n et m sont pairs, $f(n) = n+1 = m+1 = f(m)$, donc $n = m$.
   Finalement, dans tous les cas, si $f(n) = f(m)$, alors $n = m$: la fonction f est donc injective.
   Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si a est pair, alors $a+1$ est impair et $f(a+1) = (a+1)-1 = a$. Si a est impair, alors $a-1$ est pair et $f(a-1) = (a-1)+1 = a$. Ainsi, a possède nécessairement un antécédent par f : f est donc surjective.

4. (a) On a directement $xe^{-x} + x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et $x - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ (par croissances comparées), donc par quotient :
$$\frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x} = x$$

   (b) On a $x + \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + x + o(x) \sim 2x$, donc par quotient :
$$\frac{x+\sin(x)}{x\ln(x)} \underset{x0}{\sim} \frac{2x}{x\ln(x)} = \frac{2}{\ln(x)}$$

   (c) On a $\sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2} \underset{x\to+\infty}{\sim} (x^2)^{1/2} = x$. De même, $\sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Donc :
$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{=} x + o(x) + x + o(x) = 2x + o(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$$

(d) Passons cette fois par la quantité conjuguée (la méthode réalisée plus haut fonctionne également !) pour utiliser le résultat qu'on vient de démontrer :

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

Exercice 2 [Étude d'une application]

1. (a) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$. On a $f(z)=1 \iff \bar{z}+1=z-1 \iff z-\bar{z}=2 \iff 2i\mathrm{Im}(z)=2$. Cette dernière équation n'ayant aucune solution ($2i\mathrm{Im}(z)$ est imaginaire pur, et 2 est un réel non nul), 1 n'a pas d'antécédents par f.
   (b) Soit $z\in i\mathbb{R}$. Il existe donc $b\in\mathbb{R}$ tel que $z=ib$. On a $f(z)=\frac{-ib+1}{ib-1}=-1$. Donc $f(i\mathbb{R})\subset\{-1\}$ Réciproquement, $f(i\mathbb{R})$ contient bien $-1=f(i)$. Donc : $f(i\mathbb{R})=\{-1\}$
   (c) La fonction f n'est pas injective car $f(i)=f(2i)$ mais $i\neq 2i$, pas surjective car 1 n'a pas d'antécédent, et pas bijective par exemple car elle n'est pas injective.
2. (a) Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors $g(x)=\frac{x+1}{x-1}\in\mathbb{R}$. Comme 1 n'a pas d'antécédent par f, il n'en a pas par g non plus. Ainsi, $\mathrm{Im}(g)\subset\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (b) Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors

$$g\circ g(x)=g\left(g(x)\right)=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{2x}{2}=x.$$

   Ainsi, $g\circ g=Id_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$.
   (c) Soit h l'application de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans lui-même induite par g. On vient de voir que $h\circ h=Id_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$. Ainsi h est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans lui-même, de réciproque elle-même.

Exercice 3 [Injectivité et surjectivité dans une composée]

1. (a) Non. Par exemple, avec $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^x-1$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ définie par $g(x)=x^2$, $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ définie par $g\circ f(x)=(e^x-1)^2$ est bien surjective (e^x-1 décrit $\mathbb{R}_+$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$, donc $(e^x-1)^2$ aussi), mais f ne l'est pas : -2 n'a, par exemple, aucun antécédent par f.
   (b) Supposons donc $g\circ f$ surjective et g injective. Soit $y\in F$. Alors $g(y)\in G$ possède un antécédent par $g\circ f$ (par surjectivité de cette dernière application), disons x : on a donc $g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)$. Mais par injectivité de g, on a donc $f(x)=y$. On vient de montrer que y possède un antécédent par f, qui est donc surjective.

   Autre version : $g\circ f$ est surjective donc g aussi. Donc, si g est injective, elle est bijective. Donc $f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ est la composée d'applications surjectives, donc est surjective.
2. (a) Non. Par exemple, si $f:x\mapsto e^x$ et $g:x\mapsto x^2$, toutes deux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $g\circ f:x\mapsto(e^x)^2=e^{2x}$ est injective (car strictement croissante) mais g ne l'est pas ($g(-1)=g(1)$).
   (b) Supposons donc $g\circ f$ injective et f surjective. Soit $y,y'\in F$. Supposons que $g(y)=g(y')$. Par surjectivité de f, nous pouvons trouver deux antécédents $x,x'\in E$ de y et y' par f : $f(x)=y, f(x')=y'$. On a donc $g(f(x))=g\circ f(x)=g\circ f(x')=g(f(x'))$. Par injectivité de $g\circ f$, on a donc $x=x'$, puis $y=f(x)=f(x')=y'$. On a montré que g est injective.

   Autre version : $g\circ f$ est injective donc f aussi. Donc, si f est surjective, elle est bijective. Donc $g=(g\circ f)\circ f^{-1}$ est la composée d'applications injectives, donc est injective.
3. Raisonnons comme dans l'indication :
   — Supposons f surjective. Alors, $g\circ f$ étant injective (car bijective), f l'est aussi (d'après le cours), donc f est injective et surjective et donc bijective.

- Supposons f bijective. Alors, $g \circ f$ étant surjective (car bijective), g l'est aussi (d'après le cours), mais $g \circ f$ étant injective et f surjective, la question 2.b montre que g est injective. Ainsi, g est bijective.
- Supposons g bijective. Alors g est notamment injective.
- Supposons g injective. Alors, $g \circ f$ étant surjective, d'après la question 1.b, f est surjective.

On a bien montré toutes les implications demandées !

Exercice 4 [Applications et complémentaires]

1. (a) Soit $y \in f(B) \setminus f(A)$. Cela signifie qu'il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$, et que pour tout $a \in A$, $y \neq f(a)$. Notamment, un tel b ne peut être dans A (car cela nierait la deuxième partie de ce qu'on vient de dire), et donc $y = f(b) \in f(B \setminus A)$.
   (b) Non. Prenons par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et $A = \{-1\}, B = \{-1, 1\}$. Alors $f(A) = f(B) = \{1\}$, donc $f(B) \setminus f(A) = \emptyset$, mais $f(B \setminus A) = f(\{1\}) = \{1\}$. L'inclusion réciproque n'est donc pas vérifiée.
2. (a) Raisonnons par double inclusion. L'inclusion directe a déjà été montrée en toute généralité en question 1.a. Réciproquement, soit $y \in f(B \setminus A)$. Il existe $b \in B \setminus A$ tel que $y = f(b)$. Notamment, $b \in B$, donc $y \in f(B)$. Supposons que $y \in f(A)$. Il existerait alors $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Mais $a \neq b$, car $a \in A$ et $b \notin A$. Le fait que $y = f(a) = f(b)$ rentre en contradiction avec l'injectivité de f. Donc $y \notin f(A)$, et $y \in f(B) \setminus f(A)$. D'où le résultat.
   (b) Avec $B = E$, le résultat est direct.
3. Supposons donc que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $f\left(\bar{A}\right) = \bar{f(A)}$.

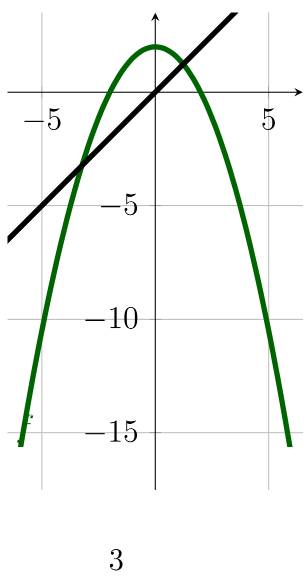
   Soit $x, y \in E$. Supposons que $f(x) = f(y)$. Posons $A = \{x\}$. Alors, $f(E \setminus \{x\}) = \{\bar{f(x)}\}$; notamment, pour tout $z \in E$ différent de x, $f(z) \neq f(x)$. C'est donc, puisque $f(y) = f(x)$, que $y = x$. On a montré que f est injective.

   Appliquons l'hypothèse faite sur f à $A = E$. On a donc que $f(\bar{E}) = f(\emptyset) = \emptyset = \bar{f(E)}$. Cela veut dire que $f(E) = F$, autrement dit que $\mathrm{Im}(f) = F$. C'est donc que f est surjective.

   Étant injective et surjective, f est bien bijective. D'où le résultat !

II Problème

1. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto -x$. Ainsi, f croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. f tend manifestement vers $-\infty$ en $\pm\infty$.
2. Il s'agit de résoudre l'équation $2 - \frac{x^2}{2} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Cette équation est équivalente à $x^2 + 2x - 4 = 0$, qui possède deux solutions $\alpha = -1 - \sqrt{5}$ et $\beta = -1 + \sqrt{5}$.

   Par ailleurs, $x \mapsto f(x) - x$ est positif sur $[\alpha, \beta]$ et négatif ailleurs.
3. 

4. Si $x \leqslant \alpha, f(x) \leqslant x \leqslant \alpha$. Donc, $]-\infty, \alpha[$ est stable par f.
5. La fonction f étant décroissante sur $[0, \beta[$ et sur $]f(\beta, f(0)]$, $f \circ f$ est croissante sur $[0, \beta[$. Ainsi, $f \circ f\left([0, \beta[\right)$ est inclus dans $[f \circ f(0), f \circ f(\beta)[= [0, \beta[$. Ainsi, $[0, \beta[$ est stable par $f \circ f$.
   Mais cet intervalle n'est pas stable par f, par exemple parce que $f(0) = 2 \notin [0, \beta[$.
6. α et β sont des points fixes de $f \circ f$, car $f \circ f(\alpha) = f(\alpha) = \alpha$ (α est un point fixe de f) ; idem pour β. Par ailleurs, $f \circ f(0) = 0$ et $f \circ f(2) = f(0) = 2$. On a donc trouvé quatre points fixes de $f \circ f$. Comme $x \mapsto f \circ f(x) - x$ est une fonction polynomiale de degré 4, elle ne peut pas avoir plus de 4 racines, il n'y a donc pas d'autres points fixes à $f \circ f$.
7. On a bien $f \circ f(0) = 0 \leqslant 0$. S'il existait un x_0 dans $[0, \beta[$ tel que $f \circ f(x_0) > x_0$, ce x_0 serait donc dans $]0, \beta[$. Par ailleurs, $f \circ f(1) - 1 = -\frac{1}{8} < 0$. La fonction $x \mapsto f \circ f(x) - x$, continue, est négative en $1 \in]0, \beta[$ et positive en x_0 ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule donc en un point situé entre x_0 et 1, donc notamment dans $]0, \beta[$. Mais c'est impossible, car on a vu que la fonction $f \circ f$ n'avait que quatre points fixes.
   Donc : pour tout $x \in [0, \beta[, \quad f \circ f(x) \leqslant x$.
8. Dans ce cas, la suite est constante de valeur α ou β, selon le cas, par une récurrence directe.
9. Si $a < \alpha$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]-\infty, \alpha[$ (d'après la question 4) et est décroissante (car d'après la question 2, $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur l'intervalle $]-\infty, \alpha[$). Elle a donc une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si sa limite était réelle, ce serait un point fixe de f, strictement inférieur à α, mais un tel nombre n'existe pas (car tous les points fixes de f autres que α sont supérieurs à α d'après la question 6). Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
10. (a) La fonction $f \circ f$ est croissante sur l'intervalle $[0, \beta[$, stable par $f \circ f$. Ainsi, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, qui est une suite récurrente associée à la fonction $f \circ f$, est monotone, et en fait décroissante car d'après la question 7, $u_2 = f \circ f(u_0) \leqslant u_0$. Elle converge donc vers un certain ℓ, qui, par continuité de $f \circ f$, doit être un point fixe de cette dernière fonction. Mais, étant décroissante, elle ne peut converger vers β ou vers 2 qui sont supérieurs à u_0, et ne peut non plus converger vers α qui est strictement négatif quand tous les termes de la suite sont positifs ou nuls. Sa seule limite possible est donc 0.
    Ainsi, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
    (b) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait, ce serait forcément vers 0 puisque 0 est limite de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mais par ailleurs, par continuité de f, elle doit converger vers un point fixe de f. Or, 0 n'est pas un point fixe de f. Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
11. (a) Si (u_n) prenait la valeur ℓ en un rang, alors, puisque ℓ est un point fixe de f, elle stationnerait à ℓ pour tous les rangs suivants. Ainsi, si (u_n) n'est pas stationnaire, elle ne prend jamais la valeur ℓ.
    (b) Par continuité de f', cette limite est égale à $f'(\ell)$, c'est-à-dire à $-\ell$, quand n tend vers $+\infty$.
    (c) On a donc que $\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|}$ tend vers $|\ell|$ quand $n \to +\infty$. Or, $|\ell| > 1$, car $\ell = \alpha$ ou $\ell = \beta$ (puisque ℓ doit être un point fixe de f), et on le vérifie à la main pour ces deux-là. Donc la suite $\left(\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $|\ell| > 1$ et est donc supérieure ou égale à 1 à partir d'un certain rang. À partir de ce rang, on a donc $|u_{n+1} - \ell| \leqslant |u_n - \ell|$, et la suite $(|u_n - \ell|)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante à partir d'un certain rang, disons $N \in \mathbb{N}$.
    Mais par ailleurs, elle est à valeurs strictement positives (car u_n ne prend jamais la valeur l par hypothèse), donc à partir de ce rang N, elle est minorée par $|u_N - \ell| > 0$. Et elle doit tendre vers 0 ! C'est impossible.
12. C'est une conséquence de la question précédente : si la suite n'est pas stationnaire, elle ne peut converger.