DS N$^{\text{O}}$4 DU 16/12/2023

Durée : 4h00. Ce devoir est constitué de quatre exercices et d'un problème. L'exercice 4 est plus difficile : intéressez vous prioritairement aux trois premiers exercices ainsi qu'au problème, avant éventuellement de revenir à l'exercice. Comme d'habitude, mieux vaut en faire peu, mais bien, que beaucoup très mal!

Exercice 1. Proche du cours

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes.

1. Calculer les limites des suites de terme général suivants :

   (a) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ (b) $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, \quad u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Déterminer une expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On considère l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

   f est-elle injective ? Surjective ?

4. Trouver un équivalent simple aux expressions suivantes au point indiqué :

   (a) $\dfrac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln(x)}$, $x \to +\infty$

   (b) $\dfrac{x + \sin(x)}{x\ln(x)}$, $x \to 0^+$

   (c) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$, $x \to +\infty$

   (d) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$, $x \to +\infty$

Exercice 2. Étude d'une application

On considère ici l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\overline{z}+1}{z-1} \end{array} \right. .$$

1. (a) Déterminer les antécédents de 1 par f.
   (b) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.
   (c) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. Dans cette question, on note g la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   (a) Montrer que $\text{Im}(g) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   (b) Simplifier $g \circ g$.
   (c) En déduire que g réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans lui-même, et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3. Injectivité et surjectivité dans une composée

On considère ici E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. On suppose ici que $g \circ f$ est surjective :
   (a) La fonction f est-elle nécessairement surjective ? Si oui, on le prouvera ; sinon, on déterminera un contre-exemple.
   (b) Montrer que, si g est injective, alors f est surjective.
2. On suppose ici que $g \circ f$ est injective :
   (a) La fonction g est-elle nécessairement injective ? Si oui, on le prouvera ; sinon, on déterminera un contre-exemple.
   (b) Montrer que, si f est surjective, alors g est injective.
3. On suppose ici que $g \circ f$ est bijective. Montrer que l'on a l'équivalence entre :
   (i) f surjective ;
   (ii) f bijective ;
   (iii) g bijective ;
   (iv) g injective ;

   Indication : on pourra montrer les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

Exercice 4. Applications et complémentaires

On considère E, F deux ensembles et $f : E \to F$.
Pour tout cet exercice :

- si A est une partie de E, on notera $\overline{A}$ son complémentaire dans E, c'est-à-dire : $\overline{A} = E \setminus A$;
- si B est une partie de F, on notera $\overline{B}$ son complémentaire dans F, c'est-à-dire : $\overline{B} = F \setminus B$.

On prendra garde, dans tout l'exercice, à ce que la notation $\overline{C}$ est ambiguë, et a un sens différent selon que C est une partie de E ou de F.

On souhaite montrer que l'application f est bijective si, et seulement si : pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

1. On considère dans cette question $A, B \in \mathcal{P}(E)$:
   (a) Montrer que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$.
   (b) L'inclusion réciproque est-elle vérifiée ? Si oui, la prouver. Sinon, donner un contre-exemple.
2. On suppose ici f bijective :
   (a) Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $f(B) \setminus f(A) = f(B \setminus A)$.
   (b) En déduire que : pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
3. Réciproquement, montrer que si pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, alors f est bijective.

   Indication : on pourra montrer séparément l'injectivité et la surjectivité de f en prenant des choix pertinents d'ensembles A.

Problème 1. Une suite récurrente

Pour tout le problème, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$$

On s'intéresse au comportement de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$.

Partie 1 : Étude de f

On s'intéresse ici à certaines propriétés de f qui seront utiles pour l'étude de (u_n). Les résultats de cette partie, même s'ils n'ont pas été montrés, pourront être utilisés dans les parties suivantes.

1. Réaliser une étude rapide de f : dérivabilité, dérivée, monotonie, limites aux bornes.
2. Montrer que f possède deux points fixes sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire deux réels qui sont leur propre image par f), que l'on notera α, β avec $\alpha < \beta$, puis le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f et celle de $x \mapsto x$ sur un même graphe.
4. Montrer que l'intervalle $]-\infty;\alpha[$ est stable par f.
5. Montrer que $[0;\beta[$ est stable par $f \circ f$. Est-il stable par f ?
6. Déterminer quatre points fixes de $f \circ f$, puis montrer que ce sont ses seuls points fixes.
   Indication : on pourra s'intéresser aux points fixes de f.
7. Déduire des questions précédentes que : $\forall x \in [0;\beta[,\ f \circ f(x) \leq x$.

Partie 2 : Une première étude de (u_n)

On se propose ici d'étudier le comportement de (u_n) suivant la valeur de a.

8. On suppose que $a \in \{\alpha, \beta\}$. Que penser de la suite (u_n) ?
9. On suppose que $a < \alpha$. Étudier la nature de (u_n). *Indication :* on pourra commencer par étudier la monotonie de (u_n).
10. On suppose que $a \in [0;\beta[$.
    (a) Montrer que la suite (u_{2n}) converge vers 0.
    (b) En déduire que (u_n) diverge.

    Remarque : on pourrait montrer de même que, si $a \in]\beta; 2]$, alors (u_n) diverge également. Ce résultat pourra être utilisé dans la suite si besoin.

Partie 3 : Étude qualitative (u_n)

On souhaite ici étudier le comportement général de (u_n), et plus précisément les situations où elle converge.

11. On suppose ici que (u_n) converge, et on note ℓ sa limite.
    (a) On suppose que (u_n) n'est pas stationnaire : montrer que (u_n) ne prend jamais ℓ pour valeur.
    On suppose pour la suite que (u_n) n'est pas stationnaire.
    (b) Étudier la limite de la suite de terme général $\dfrac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell}$.
    (c) En déduire que la suite $(|u_n - \ell|)$ est croissante à partir d'un certain rang. En déduire une contradiction.
12. Montrer que la suite (u_n) est soit divergente, soit stationnaire.