# DS n$^o$4

## I Intégrales et primitives

**Exercice 1**

Déterminer primitives des fonctions suivantes, en précisant bien à chaque fois l'intervalle sur lequel cette primitive est valable :

1. On linéarise : pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos^3(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3it}+e^{-3it}+3e^{it}+3e^{-it}}{8} = \frac{\cos(3t)}{4} + \frac{3\cos(t)}{4}$$
et donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \cos^3(t)$ est $t \mapsto \frac{1}{12}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$.
**Remarque :** on pouvait aussi faire par les règles de Bioche, et le changement de variable $u = \sin(t)$ donne comme primitive : $t \mapsto \sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t)$.
2. On passe par la complexes en notant que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :
$$\cos(t)e^t = \mathrm{Re}\left(e^{(i+1)t}\right)$$
et on a de plus :
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i}e^{(i+1)t}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{2}e^{(i+1)t}\right) = \frac{e^t}{2}\left(\cos(t)+\sin(t)\right).$$
et donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \cos(t)e^t$ est $t \mapsto \frac{e^t}{2}\left(\cos(t)+\sin(t)\right)$.
3. On va procéder à deux intégrations par parties, en dérivant le polynôme devant l'exponentielle. On a :
$$\begin{array}{rcl} \int^x t^2e^t\mathrm{d}t & = & x^2e^x - \int^x 2te^t\mathrm{d}t \\ & = & x^2e^x - 2xe^x + \int^x 2e^t\mathrm{d}t \\ & = & x^2e^x - 2x + 2e^x \\ & = & (x^2-2x+2)e^x \end{array}$$
ce qui donne que $t \mapsto (t^2-2t+2)e^t$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto t^2e^t$.
4. On passe par les complexes, puis on fait une intégration par parties. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$t\sin(t) = \mathrm{Im}\left(te^{it}\right)$$
et comme ci-dessus :
$$\begin{array}{rcl} \int^x te^{it}\mathrm{d}t & = & -ixe^{ix} + \int^x ie^{it}\mathrm{d}t \\ & = & -ixe^{ix} + e^{ix} \\ & = & (1-ix)e^{ix} \end{array}$$
et comme :
$$\mathrm{Im}\left((1-ix)e^{ix}\right) = \sin(x) - x\cos(x)$$
on trouve finalement que $t \mapsto \sin(t) - t\cos(t)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto t\sin(t)$.
5. On procède par intégration par parties en dérivant le ln. Comme la fonction ln est seulement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, celle-ci n'est que légitime sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :
$$\int^x t\ln(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \int^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$$
et finalement, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto t\ln(t)$ est $t \mapsto \frac{t^2\ln(t)}{2} - \frac{t^2}{4}$.

6. On procède par intégration par parties :
$$\int^x t\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2\mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\int^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
où la seconde primitive se calcule par :
$$\int^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = x - \mathrm{Arctan}(x)$$
et finalement, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto t\mathrm{Arctan}(t)$ est $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)\dfrac{t^2+1}{2} - \dfrac{t}{2}$.
7. On a au dénominateur un polynôme de degré de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. On passe par la forme canonique :
$$t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$
et donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$ se primitive sur $\mathbb{R}$ en : $t \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$.
8. On a (1 étant racine évidente) : $t^2+2t-3 = (t-1)(t+3)$.
On écrit sous forme d'éléments simples :
$$\frac{1}{t^2+2t-3} = \frac{1/4}{t-1} + \frac{-1/4}{t+3}$$
ce qui donne pour primitive :
$$t \mapsto \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+3}\right|.$$
Et la primitive ci-dessus est valable sur les trois intervalles maximaux sur lesquels la fonction est définie, à savoir : $]-\infty;-3[$, $]-3;1[$ et $]1;+\infty[$.

**Exercice 2**

À l'aide des changements de variables donnés, calculer :

1. des primitives des fonctions suivantes :
   (a) Sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :
   $$\int^x \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{x}} \frac{2u}{u+u^3}\mathrm{d}u = \int^{\sqrt{x}} \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = 2\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$$
   donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ est $t \mapsto 2\mathrm{Arctan}(\sqrt{t})$.
   (b) Sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :
   $$\int^x \frac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t = \int^{\ln(x)} \frac{ue^u}{e^u+e^uu^2}\mathrm{d}u = \int^{\ln(x)} \frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\left(1+\ln(x)^2\right)$$
   et donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\ln(t)^2\right)$.
   (c) Sur $\mathbb{R}$ on a :
   $$\int^x \frac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t = \int^{e^x} \frac{u}{u+1}\mathrm{d}u = \int^{e^x}\left(1 - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = e^x - \ln(1+e^x)$$
   et donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}$ est $t \mapsto e^x - \ln(1+e^x)$.

(d) Sur $]-1;+\infty[$ on a :

$$\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{1+x}} 2(u^2-1)\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}^3 - 2\sqrt{1+x}$$

et donc une primitive sur $]-1;+\infty[$ de $t \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ est $t \mapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{1+t}^3 - 2\sqrt{1+t}$.

2. les intégrales suivantes :

(a)

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(u)}}_{=\cos(u)}\cos(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

où on calcule la dernière intégrale en linéarisant (par exemple), ou en notant que, par parité :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\mathrm{d}u$$

tandis que par $\pi$-périodicité de $u \mapsto \cos^2(u)$ on a :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \cos^2(u)\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$$

(résultat montré en cours).

(b)

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 \cos^2(u)\underbrace{\sqrt{1-\cos^2(u)}}_{=\sin(u)}(-\sin(u))\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \sin^2(u)\cos^2(u)\mathrm{d}u$$

et on peut calculer la dernière intégrale en linéarisant, ou plus simplement en notant que : $\sin(u)\cos(u) = \dfrac{1}{2}\sin(2u)$ et donc :

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2u)\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \sin^2(v)\mathrm{d}v$$

avec le changement de variable $v = 2u$. Et on reconnaît à nouveau l'intégrale de $\sin^2$ sur $[0;\pi]$, ce qui donne :

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{16}.$$

(c)

$$\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} 4\ln(u)\mathrm{d}u = 4\left[u\ln(u) - u\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ln(2) - 4\sqrt{2} + 4.$$

(d)

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u$$

et on primitive $u \mapsto \dfrac{1}{1-u^2}$ comme dans le cours, en notant que $\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1/2}{1+u} - \dfrac{1/2}{1-u}$, ce qui donne :

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(t)}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(3).$$

avec $u = \sin(t)$

# II Équations différentielles

**Exercice 3**

1. $S = \left\{ x \mapsto \dfrac{\lambda + x}{1+x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$.

2. $S = \left\{ x \mapsto \dfrac{\lambda + x + e^x}{1+e^x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto \dfrac{-1+x+e^x}{1+e^x}$.

3. $S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x} + \dfrac{e^x}{5}(2\cos(x) + \sin(x)) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

   **Remarque :** pour une solution particulière, on passe par les complexes pour primitive $x \mapsto \cos(x)e^{2x}$.

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto 37e^{-x} + \dfrac{e^x}{5}(2\cos(x) + \sin(x))$ (en notant que $\dfrac{187}{5} = 37 + \dfrac{2}{5}$).

4. $S = \left\{ x \mapsto \dfrac{\lambda + \ln(x)}{1+\ln(x)^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto \dfrac{73+\ln(x)}{1+\ln(x)^2}$.

**Exercice 4**

Tous les seconds membres, quitte à passer dans les complexes, se traitent comme des exponentielles (comme dans le cours). On donne l'ensemble solution puis l'unique solution au problème de Cauchy :

1. $S = \left\{ x \mapsto e^{-2x}\left(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\right) - \dfrac{e^{-2x}}{2}x\cos(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto e^{-2x}\left(\cos(x) + 3\sin(x)\right) - \dfrac{e^{-2x}}{2}x\cos(x)$ ($\lambda = 1$ et $\mu = 3$)

2. $S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^x - \dfrac{e^x}{8}\left(\cos(2x) - \sin(2x)\right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto -\dfrac{e^x}{8}\left(\cos(2x) - \sin(2x)\right)$ ($\lambda = \mu = 0$)

3. $S = \left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu)\, e^{-x} + \dfrac{x-1}{4}e^x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto (37x+1)\, e^{-x} + \dfrac{x-1}{4}e^x$ ($\lambda = 37$, $\mu = 1$)

4. $S = \left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x + \dfrac{1}{2}x^2e^x + \dfrac{1}{4}e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ où on utilise le principe de superposition pour trouver une solution particulière.

   Solution au problème de Cauchy : $x \mapsto \left(37x + \dfrac{1}{4}\right)e^x + \dfrac{1}{2}x^2e^x + \dfrac{1}{4}e^{-x}$ ($\lambda = 37$ et $\mu = \dfrac{1}{4}$).