DS n^{o}4

I Intégrales et primitives

Exercice 1

Déterminer primitives des fonctions suivantes, en précisant bien à chaque fois l'intervalle sur lequel cette primitive est valable :

1. $t \mapsto \cos^3(t)$
2. $t \mapsto \cos(t)e^t$
3. $t \mapsto t^2e^t$
4. $t \mapsto t\sin(t)$
5. $t \mapsto t\ln(t)$
6. $t \mapsto t\text{Arctan}(t)$
7. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$
8. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t-3}$

Exercice 2

À l'aide des changements de variables donnés, calculer :

1. des primitives des fonctions suivantes :
   (a) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ avec $u = \sqrt{t}$
   (b) $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2}$ avec $u = \ln(t)$
   (c) $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}$ avec $u = e^t$
   (d) $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$ avec $t = u^2-1$
2. les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ avec $t = \sin(u)$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ avec $t = \cos(u)$
   (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$
   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(t)}\mathrm{d}t$ avec $u = \sin(t)$

II Équations différentielles

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes, puis résoudre le problème de Cauchy associé :

1. $(x^2+1)y' + 2xy = 1$, avec $y(0) = 1$.
2. $y' + \dfrac{e^x}{1+e^x} y = 1$, avec $y(0) = 0$
3. $y' + y = \cos(x)e^x$, avec $y(0) = \dfrac{187}{5}$
4. $x(1 + \ln(x)^2)y' + 2\ln(x)y = 1$ (sur $\mathbb{R}_+^*$), avec $y(e) = 37$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes, puis résoudre le problème de Cauchy associé.

On n'exprimera que les solutions réelles, et on veillera à ne pas utiliser l'exponentielle complexe pour les exprimer (on utilisera les fonctions circulaires à la place).

1. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sin(x)$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = \dfrac{1}{2}$
2. $y'' - y = e^x \cos(2x)$, $y(0) = -\dfrac{1}{8}$ et $y'(0) = \dfrac{1}{8}$
3. $y'' + 2y' + y = xe^x$, $y(0) = \dfrac{3}{4}$ et $y'(0) = 36$

   Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto f(x)e^x$ où f est une fonction affine
4. $y'' - 2y' + y = 2\text{ch}(x)$, $y(0) = 37$ et $y'(0) = \dfrac{1}{2}$