DS n^{o}3

I Exercices

Exercice 1 [Calcul d'intégrales et de primitives, résolution d'équations différentielles]

1. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $\quad \sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$. Donc
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = \pi.$$
2. Directement : $F : t \mapsto \frac{\exp(t^2)}{2}$ en est une.
3. Par intégration par parties,
$$\int_0^1 t\arctan t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t^2\arctan(t)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$
et comme pour $t \in [0, 1]$ on a $\dfrac{t^2}{t^2+1} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$, on obtient
$$\int_0^1 t\arctan t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[(t^2+1)\arctan(t) - t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$
4. On obtient
$$\int_1^2 \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(2)} \frac{ue^u}{e^u + e^u u^2}\mathrm{d}u = \int_0^{\ln(2)} \frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\ln(1+u^2)\right]_0^{\ln(2)}$$
et donc finalement
$$\int_1^2 \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \ln(2)^2\right).$$
5. — L'équation homogène $y' + 2y = 0$ possède comme solutions les $x \mapsto \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}$.
   — On cherche une solution particulière à $y' + 2y = \cos(x)$. Soit on complexifie l'équation en cherchant une solution particulière à $z' + 2z = e^{ix}$ sous la forme $z(x) = Ke^{ix}$ ($K \in \mathbb{C}$ à déterminer) puis on prend la partie réelle. Soit on regarde l'équation dans le blanc des yeux et on la cherche sous la forme $y_{p,1}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. Quelle que soit la méthode choisie, on obtient une solution $y_{p,1}(x) = \frac{2\cos(x)+\sin(x)}{5}$.
   — On cherche une solution particulière à $y' + 2y = e^{-2x}$. On est dans le cas de résonance et on cherche donc une solution qu'on trouve : $y_{p,2}(x) = xe^{-2x}$.
   — Par principe de superposition, $y_p(x) = xe^{-2x} + \frac{\sin(x)+2\cos(x)}{5}$ est donc solution particulière de l'équation $y' + 2y = \cos(x) + e^{-2x}$.
   — Par théorème de structure, les solutions de cette équation sont donc toutes les fonctions de la forme
$$x \mapsto (\lambda + x)e^{-2x} + \frac{\sin(x) + 2\cos(x)}{5}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
6. Remarquons tout d'abord que sur $]-1, 1[$, $\quad \sqrt{1-t^2} \neq 0$ donc l'équation différentielle est équivalente à
$$y'(t) - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$
   — On reconnaît la dérivée de arcsin, et les solutions de l'équation homogène sont donc les $t \mapsto \lambda e^{\arcsin(x)}, \lambda \in \mathbb{R}$.

— Une solution particulière évidente est la fonction constante égale à -1 !

— Par théorème de structure, les solutions sont donc les $t \mapsto \lambda e^{\arcsin(x)} - 1, \lambda \in \mathbb{R}$.

— La condition initiale donne $\lambda = 1$ puis

$$y : t \mapsto e^{\arcsin(x)} - 1$$

Exercice 2 [Une équation trigonométrique]

1. Si p est pair (mettons $p = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$), alors $\cos(p\pi) = \cos(2k\pi) = 1$.
   Si p est impair (mettons $p = 2k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$), alors $\cos(p\pi) = \cos(2k\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$.
   Conclusion : $\boxed{\cos(p\pi) = (-1)^p}$
   On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p \cos(p\pi) \;=\; \sum_{p=0}^{2n}(-1)^p(-1)^p \;=\; \sum_{p=0}^{2n}\underbrace{(-1)^{2p}}_{=1} \;=\; 2n+1 \neq 0$$

   Donc π n'est pas solution de (F).

2. Si l'on considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{p=0}^{2n}(-1)^p \cos(px)$, définie sur $\mathbb{R}$, alors l'équation (F) est l'équation $f(x) = 0$. Or, f est 2π-périodique car, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+2\pi) = \sum_{p=0}^{2n}(-1)^p \cos(p(x+2\pi)) = \sum_{p=0}^{2n}(-1)^p \underbrace{\cos(px+2p\pi)}_{=\cos(px)} = f(x)$$

   Donc si l'on connaît les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $]-\pi, \pi[$, on en déduit les solutions sur $\mathbb{R}$ par translation de $2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. (remarque : π n'est pas solution, donc tous les $\pi + 2k\pi$ non plus)

3. Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On a donc $e^{ix} \neq -1$, qui implique $-e^{ix} \neq 1$, ce qui permet d'appliquer la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p e^{ipx} \;=\; \sum_{p=0}^{2n}(-e^{ix})^p \;=\; \frac{1-(-e^{ix})^{2n+1}}{1-(-e^{ix})} \;=\; \frac{1-(-1)^{2n+1}e^{i(2n+1)x}}{1+e^{ix}} \;=\; \frac{1+e^{i(2n+1)x}}{1+e^{ix}}$$

   On poursuit le calcul (factorisations par l'angle milieu) :

$$\frac{1+e^{i(2n+1)x}}{1+e^{ix}} = \frac{e^{i(\frac{2n+1}{2})x}\left(e^{-i(\frac{2n+1}{2})x} + e^{i(\frac{2n+1}{2})x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}\right)} = e^{i(\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{2})x}\,\frac{2\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{inx}\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

4. On remarque que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, le nombre $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p \cos(px)$ est la partie réelle de $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p e^{ipx}$, c'est-à-dire $\cos(nx)\dfrac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ d'après la question précédente.
   On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de (F)} &\iff \cos(nx)\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = 0 \\ &\iff \cos(nx) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\tfrac{2n+1}{2}x\right) = 0 \end{aligned}$$

5. Soit $x \in]-\pi, \pi[$.

▶ Résolvons l'équation $\cos(nx) = 0$.

$$\begin{aligned}
\cos(nx) = 0 &\iff nx = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{pour un certain } k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \tfrac{\pi}{2n} + \tfrac{k}{n}\pi = \tfrac{\pi}{2n}(2k+1) \quad \text{pour un certain } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Le fait que $x \in]-\pi, \pi[$ permet de restreindre les $k \in \mathbb{Z}$ possibles :

$$\begin{aligned}
-\pi < \tfrac{\pi}{2n}(2k+1) < \pi &\iff -2n < 2k+1 < 2n \\
&\iff -n - \tfrac{1}{2} < k < n - \tfrac{1}{2} \\
&\iff -n \leqslant k \leqslant n-1 \quad \text{(car } k \text{ est un entier)}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\cos(nx) = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2n}(2k+1) \quad \text{pour un certain } k \in [\![-n, n-1]\!]}$

▶ Résolvons l'équation $\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) = 0$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\tfrac{2n+1}{2}x\right) = 0 &\iff \tfrac{2n+1}{2}x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{pour un certain } k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \tfrac{\pi}{2n+1} + \tfrac{2k\pi}{2n+1}\pi = \tfrac{\pi}{2n+1}(2k+1) \quad \text{pour un certain } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Sachant que $x \in]-\pi, \pi[$, on restreint les $k \in \mathbb{Z}$ possibles :

$$\begin{aligned}
-\pi < \tfrac{\pi}{2n+1}(2k+1) < \pi &\iff -2n-1 < 2k+1 < 2n+1 \\
&\iff -n-1 < k < n \\
&\iff -n \leqslant k \leqslant n-1 \quad \text{(car } k \text{ est un entier)}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right) = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2n+1}(2k+1) \quad \text{pour un certain } k \in [\![-n, n-1]\!]}$

Conclusion : les solutions de (F) sur $]-\pi, \pi[$ sont la réunion de ces deux familles de solutions, et les solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ sont l'ensemble de ces solutions translatées de $2p\pi$, pour tous les $p \in \mathbb{Z}$.

Remarque : En fait, il s'agit de la réunion des :

- $\frac{\pi}{2n}(2k+1)$ pour $k \in \mathbb{Z}$;
- $\frac{\pi}{2n+1}(2k+1)$ pour les $k \in \mathbb{Z}$ qui ne sont pas de la forme $k = n + p(2n+1)$, avec $p \in \mathbb{Z}$.
  Pour les k de cette forme, le nombre $\frac{\pi}{2n+1}(2k+1)$ est égal à π modulo 2π, ce qui correspond au cas que l'on a exclu plus tôt.

II Problème

Autour d'une fonction
Étude de f

1. Comme $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$, alors $f(x)$ n'a de sens que si $\ln(x)$ est bien défini, donc $x > 0$, et non nul, donc $x \neq 1$, et finalement :
$$D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0; 1[\cup]1; +\infty[.$$

2. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur leurs ensemble de définition (fonctions id et ln) : f est donc dérivable sur D avec :
$$\forall x \in D,\ f'(x) = \frac{\ln(x) - x\dfrac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}.$$

3. Étude de f en 0 :
   (a) Par limite d'un quotient, on a directement :
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$
   (pas besoin de croissances comparées ici, comme on n'a pas de forme indéterminée).
   Et donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
   (b) On étudie la dérivabilité par limite du taux d'accroissement. Pour tout $x \in]0;1[$, on a
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{\ln(x)} - 0}{x-0} = \frac{1}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\to} 0$$
   où on calcule directement la limite par quotient (toujours pas besoin de croissances comparées).
   Et ainsi le prolongement de f est bien dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.
   (c) En tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est déjà de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, donc sur $]0;1[$.
   Comme elle est dérivable en 0, il suffit de montrer que f' est continue en 0 pour avoir que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.
   Pour tout $x \in]0;1[$, on a :
   $$f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2} = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)^2} \underset{x\to 0}{\to} 0+0=0$$
   car chaque terme tend vers 0 par limite d'un quotient (toujours pas besoin de croissances comparées...).
   Et ainsi : $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$: donc f' est continue en 0.
   Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.
4. On a les limites :
   $$\lim_{x\to 1^-} x = \lim_{x\to 1^+} x = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^- \text{ et } \lim_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$$
   donc par quotient on déduit :
   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$
   (donc toujours pas de croissances comparées)
   La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1 (ni à gauche ni à droite) : elle n'admet pas de limite finie en 1.
   La courbe de f possède la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.
5. Par croissances comparées (enfin !), on a :
   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$
6. De la question *2.* on déduit que $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) - 1$ sur D, et ainsi :
   — sur $[0;1[$: f est strictement décroissante ;
   — sur $]1;e]$: f est strictement décroissante ;
   — sur $[e;+\infty[$: f est strictement croissante.

   D'où le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
f'	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Solutions d'une première équation différentielle

On considère ici l'équation différentielle $(E_1) : -x^2z'(x) + xz(x) = z^2(x)$. On cherche les solutions de (E_1) sur $I =]1; +\infty[$ qui ne s'annulent pas sur I.

7. Des variations de f, on a déjà que f ne s'annule pas sur I.
   De plus, f est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$ on a :
$$-x^2 f'(x) + xf(x) = \frac{-x^2 \ln(x) + x^2}{\ln(x)^2} + \frac{x^2}{\ln(x)} = \frac{x^2}{\ln(x)^2} = f(x)^2$$
   et donc f est bien solution au problème.

8. (a) La fonction z étant solution au problème, elle est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, donc $y = \dfrac{1}{z}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$ on a :
$$y'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}.$$
   Mais z est solution de (E_1), donc pour tout $x \in I$ on a également :
$$-z'(x) = \frac{z^2(x) - xz(x)}{x^2}$$
   et finalement pour tout $x \in I$:
$$y'(x) = \frac{z^2(x) - xz(x)}{x^2 z(x)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xz(x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}y(x)$$
   donc y est solution de l'équation différentielle linéaire :
$$(E_2) : y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{x^2}.$$
   (b) L'équation homogène associée à (E_2) est :
$$(E_2^0) : y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$$
   dont les solutions sont les fonctions de la forme :
$$x \mapsto \lambda \exp(-\ln(x)) = \frac{\lambda}{x}$$
   pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pourrait chercher une solution particulière par méthode de variation de la constante. Mais on sait déjà que $\dfrac{1}{f}$ est une solution (et l'énoncé donne la forme générale des solutions, donc on pourrait en vérifier une).

Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda + \ln(x)}{x}$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$, qui est bien de la forme $x \mapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}$ en posant $a = \exp(\lambda) \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) Le signe de g_a est celui de $\varphi_a : x \mapsto \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$. Or, cette dernière fonction a les variations suivantes sur I :

x	1		$+\infty$
φ_a	$\ln(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

donc g_a ne s'annule pas si, et seulement si, $\ln(a) > 0$ (par théorème des valeurs intermédiaires), c'est-à-dire : $a > 1$.

9. On déduit donc que les seules solutions possibles sont les fonctions de la forme $z_a : x \mapsto \dfrac{1}{g_a(x)} = \dfrac{x}{\ln(ax)}$ pour $a > 1$.

Il est clair que de telles fonctions ne s'annulent pas sur I et y sont dérivables. Reste à vérifier qu'elles sont bien solution de (E_1) : si $a > 1$ et $x \in I$, alors :

$$z_a'(x) = \frac{\ln(ax) - 1}{\ln(ax)^2}$$

et donc :

$$-x^2 z_a'(x) + x z_a(x) = \frac{-x^2\ln(ax) + x^2}{\ln(ax)^2} + \frac{x^2}{\ln(ax)} = \frac{x^2}{\ln(ax)^2} = z_a(x)^2$$

ce qui prouve bien que toutes les fonctions z_a de la forme précédentes sont bien solutions.

Par analyse–synthèse, on déduit que les solutions au problème sont **exactement** les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$ pour $a > 1$.

Étude d'une autre fonction

On considère ici la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$.

10. (a) Si $x \in D$, alors $\ln(x)$ est bien défini et non nul. Si de plus $x \neq 0$, alors $x\ln(x)$ est bien défini et non nul, donc $g(x)$ est bien défini.

Et donc g est bien définie sur $D \setminus \{0\}$.

En tant que quotient de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, g est dérivable sur son ensemble de définition, avec pour tout $x \in D \setminus \{0\}$:

$$g'(x) = \frac{2x \cdot x\ln(x) - (x^2 - 1)(\ln(x) + 1)}{x^2\ln(x)^2} = \frac{x^2\ln(x) + \ln(x) - x^2 + 1}{x^2\ln(x)^2}.$$

(b) En tant que produit et combinaison linéaire de fonctions dérivables (fonctions polynomiales ou fonction ln), la fonction φ est dérivable sur son ensemble de définition, à savoir $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) = 2x\ln(x) + x + \frac{1}{x} - 2x = 2x\ln(x) + \frac{1}{x} - x.$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc :

$$\varphi'(x) = x \cdot \left(2\ln(x) + \frac{1}{x^2} - 1\right) = x \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 1 - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x \cdot (u - \ln(1+u))$$

où $u = \dfrac{1}{x^2} - 1 > -1$.

Par inégalité classique (qui découle de la concavité de la fonction ln, ou tout simplement de l'étude de $u \mapsto \ln(1+u) - u$), on a : $u - \ln(1+u) \leqslant 0$ pour tout $u > -1$, avec égalité si, et seulement si, $u = 0$, c'est-à-dire ici $x = 1$. Et ainsi :

$$\forall x > 0, \ \varphi'(x) \geqslant 0$$

avec égalité si, et seulement si, $x = 1$.

(d) La fonction φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Du fait des expressions de φ et de g', on a :

$$\forall x \in D \setminus \{0\}, \ g'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2 \ln(x)^2}$$

donc le signe de g' est celui de φ.

On a enfin $\varphi(1) = 0$. Donc φ, et donc g', est strictement négative sur $]0;1[$ et strictement positive sur $]1;+\infty[$.

11. Soit $x \in D \setminus \{0\}$. Alors :

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x\ln(x)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x\ln(x)} = \frac{x+1}{x}\frac{x-1}{\ln(x)}$$

où le premier quotient tend vers 2 (calcul direct) et le second tend vers 1 (limite classique, en reconnaissant l'inverse du taux d'accroissement de ln entre x et 1). Et finalement :

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 2.$$

Donc g est prolongeable par continuité en 1, en posant $g(1) = 2$.

12. On a les limites suivantes :
    - par calcul direct : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 - 1 = -1$;
    - par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0^-$.

    Et donc par quotient : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$.

    La courbe de g possède donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale en 0.

13. Pour $x > 1$, on a :

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x\ln(x)} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{\ln(x)}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\frac{x}{\ln(x)} \underset{x \to +\infty}{\to} 1 \cdot +\infty = +\infty$$

par croissances comparées et produit.

De plus, on a :

$$\frac{g(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\ln(x)} \underset{x \to +\infty}{\to} 1 \cdot 0 = 0$$

par produit (par besoin des croissances comparées ici).

14. On déduit finalement le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
g'	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
g	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

15. Pour tout $x \in D \setminus \{0\}$, on a :

$$f(x) - g(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{x^2-1}{x\ln(x)} = \frac{1}{x^2\ln(x)}.$$

Et ainsi la courbe de f est en-dessous de celle de g pour les points d'abscisse dans $]0;1[$, et au-dessus pour les points d'abscisse dans $]1;+\infty[$.

16. Pour $a > 1$, la courbe de f est au-dessus de celle de g entre les points d'abscisse a et a^2. Ainsi, on a :

$$\mathcal{A}(a) = \int_a^{a^2} (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^{a^2} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t.$$

Par dérivée d'une composée, la fonction $t \mapsto \ln(\ln(t))$ est dérivable sur $]1;+\infty[$, de dérivée $t \mapsto \dfrac{1/t}{\ln(t)} = f(t) - g(t)$. Et ainsi on a :

$$\mathcal{A}(a) = [\ln(\ln(t))]_a^{a^2} = \ln\left(\frac{\ln(a^2)}{\ln(a)}\right) = \ln(2)$$

ce qui prouve bien que $\mathcal{A}(a)$ ne dépend pas de $a > 1$, et vaut $\ln(2)$.

Solutions d'une seconde équation différentielle

17. Du fait du $\dfrac{1}{x}$, la fonction H n'est pas définie en 0.
De plus, l'intégrale qui définie H n'a de sens que si f est continue entre 0 et x, donc pour $x \in [0;1[$ comme f est continue sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ mais pas en 1.
Et finalement : H est définie sur $]0;1[$.

18. Par théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur $[0;1[$ qui s'annule en 0. Ainsi, par produit, la fonction $H : x \mapsto \dfrac{1}{x}F(x)$ est dérivable sur J avec pour tout $x \in J$:

$$H'(x) = -\frac{1}{x^2}F(x) + \frac{1}{x}F'(x) = -\frac{1}{x}H(x) + \frac{1}{x}f(x)$$

et donc en multipliant par x, on a bien que pour tout $x \in J$:

$$xH'(x) + H(x) = f(x)$$

donc H est solution de (E_3).

19. (a) Soit $x \in J$. La fonction f est décroissante sur $[0;1[$ donc sur $[0;x]$. Et ainsi :

$$\forall t \in [0;x],\ 0 = f(0) \geqslant f(t) \geqslant f(x)$$

En intégrant cette inégalité sur $[0;x]$, il vient :

$$0 \geqslant F(x) \geqslant x \cdot f(x)$$

et en la divisant par $x > 0$, on trouve bien que :

$$0 \geqslant H(x) \geqslant f(x).$$

(b) Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, on déduit par théorème d'encadrement que : $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = 0$.

Considérons G une solution de (E_3). Alors G est de la forme $G = g + H$, où g est une solution de l'équation homogène associée à (E_3). Cette équation est :

$$(E_3^0) : xy'(x) + y(x) = 0$$

donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Et finalement G est de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x} + H(x)$$

pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme on a vu que H admet une limite finie en 0, alors G admet également une limite finie en 0 si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$ tend vers une limite finie en 0 : c'est le cas si, et seulement si, $\lambda = 0$, c'est-à-dire $H = G$.

D'où l'unicité demandée.

(c) Pour la dérivabilité de H en 0, on reprend l'inégalité précédente. Pour tout $x \in J$, on a en effet :

$$0 \geqslant \frac{H(x)}{x} = \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} \geqslant \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\ln(x)}$$

Et le membre de droite tend vers 0 en 0 (par quotient), donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{H(x) - H(0)}{x - 0} = 0$ (par encadrement).

Et ainsi le prolongement de H en 0 est bien dérivable en 0, avec $H'(0) = 0$.

(d) Sur J, on a vu que $H : x \mapsto \dfrac{1}{x} F(x)$ qui est donc le produit de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ (la fonction inverse est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, donc sur J, et la fonction F est dérivable sur J de dérivée f, qui est continue, donc F est $\mathcal{C}^1$ sur J). Par produit, la fonction H est donc $\mathcal{C}^1$ sur J.

En 0, on a déjà montré que H est dérivable. Il reste à montrer que H' est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to 0} H'(x) = H'(0) = 0$. Or, pour $x \in J$ on a :

$$H'(x) = -\frac{1}{x} H(x) + \frac{1}{x} f(x) = -\frac{H(x)}{x} + \frac{1}{\ln(x)}.$$

Pour x tendant vers 0, le premier terme tend vers 0 (on reconnaît le taux d'accroissement, dont on a montré la limiet par encadrement) et le second tend vers 0 (limite d'un quotient).

Et finalement on a bien $\lim\limits_{x\to 0} H'(x) = 0$, donc H' est continue en 0.

Et finalement : H est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.

20. (a) Si $x \in [\frac{1}{2}; 1[$, on a :

$$x^2 \geqslant \frac{1}{4} \text{ donc } x \leqslant \frac{1}{4x}$$

et donc en les multipliant par $\dfrac{1}{\ln(x)} < 0$, on trouve :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \leqslant \frac{1}{4x\ln(x)}$$

ce qui est l'inégalité demandée.

(b) Considérons $x \in [\frac{1}{2};1[$. Alors :

$$\begin{aligned}
H(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t}_{\leqslant 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\geqslant 1}\underbrace{\int_{1/2}^x f(t)\mathrm{d}t}_{\leqslant 0}\\
&\leqslant \int_{1/2}^x f(t)\mathrm{d}t\\
&\leqslant \int_{1/2}^x \frac{1}{4t\ln(t)}\mathrm{d}t\\
&\leqslant \frac{1}{4}\left[\ln(\ln(t))\right]_{1/2}^x\\
&\leqslant \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(1/2)}\right)
\end{aligned}$$

Or, on a par quotient :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(x)}{\ln(1/2)} = 0^+$$

donc par composition :

$$\lim_{x\to 1^-} dfrac14\ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(1/2)}\right) = \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{4}\ln(y) = -\infty$$

et donc par majoration :

$$\lim_{x\to 1^-} H(x) = -\infty$$

(c) Si G est une solution de (E_3), alors G est de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x} + H(x)$$

pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.
Mais $\dfrac{\lambda}{x}$ tend vers une limite finie en 1, peu importe la valeur de λ. Et donc on aura toujours :

$$\lim_{x\to 1^-} G(x) = -\infty.$$

Donc il n'existe pas de solution de (E_3) prolongeable par continuité en 1 : toutes tendent vers $-\infty$ en 1.