DS n^{o}3

I Exercices

Exercice 1 [Calcul d'intégrales et de primitives, résolution d'équations différentielles] Les questions sont indépendantes.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto t\exp(t^2)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t\ \arctan t\,\mathrm{d}t$.
4. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{t + t\,(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$ (on pourra opérer le changement de variable $u = \ln t$).
5. Trouver toutes les solutions de $y' + 2y = \cos(x) + \exp(-2x)$ sur $\mathbb{R}$.
6. Résoudre $\sqrt{1-t^2}y'(t) - y(t) = 1$ sur $]-1,1[$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 2 [Une équation trigonométrique] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) - \cos(3x) + \cdots - \cos((2n-1)x) + \cos(2nx) = 0 \qquad \text{(F)}$$

qui peut s'écrire :

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \cos(px) = 0 \qquad \text{(F)}$$

1. Si $p \in [\![0, 2n]\!]$, que vaut $\cos(p\pi)$? En déduire que $x = \pi$ n'est pas solution de (F).
2. Justifier qu'il suffit de résoudre (F) pour $x \in]-\pi,\pi[$, en expliquant comment en déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in]-\pi,\pi[$:

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p e^{ipx} = \frac{1 + e^{i(2n+1)x}}{1 + e^{ix}} \quad \text{et en déduire que} \quad \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p e^{ipx} = e^{inx}\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

4. En déduire que $x \in]-\pi,\pi[$ est solution de (F) si, et seulement si :

$$\cos(nx) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) = 0$$

5. Résoudre (F) sur $]-\pi,\pi[$ puis sur $\mathbb{R}$.

II Problème

Autour d'une fonction
Pour tout le problème, on considère $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Partie 1 : Étude de f

1. Donner l'ensemble de définition D de f.
2. Justifier que f est dérivable sur D, et donner sa dérivée.
3. Étude de f en 0 :
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0, en précisant bien la valeur de ce prolongement en 0.
   Remarque : pour la suite du sujet, on notera également f ce prolongement.
   (b) Montrer que le prolongement de f ainsi obtenu est dérivable en 0, en précisant bien son nombre dérivé en 0.
   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.
4. Étude de f en 1 : calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
   La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Quelle particularité possède la courbe de f à l'abscisse 1 ?
5. Étude de f en $+\infty$: calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
6. Déduire des questions suivantes les variations de f, en faisant bien apparaître les différentes limites calculées précédemment.

Partie 2 : Solutions d'une première équation différentielle

On considère ici l'équation différentielle $(E_1) : -x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x)$. On cherche les solutions de (E_1) sur $I =]1;+\infty[$ qui ne s'annulent pas sur I.

7. Vérifier que f est bien solution au problème.
8. On considère pour cette question z une solution de (E_1) ne s'annulant pas sur I, et on pose $y = \dfrac{1}{z}$.
   (a) Montrer que y est solution sur I d'une équation différentielle linéaire (E_2).
   (b) Résoudre (E_2) sur I.
   Indication : on vérifiera que les solutions sont de la forme $g_a : x \mapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}$.
   (c) Étudier le signe de g_a sur I selon la valeur de a.
9. Conclure.

Partie 3 : Étude d'une autre fonction

On considère ici la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x\ln(x)}$.

10. (a) Justifier que g est définie et dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer sa dérivée.
   (b) On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $\varphi : x \mapsto x^2\ln(x) + \ln(x) - x^2 + 1$. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\varphi'(x) \geqslant 0$, en précisant bien pour quelle(s) valeur(s) de x on a $\varphi'(x) = 0$.
   Indication : on pourra faire apparaître l'inégalité classique $\ln(1+u) \leqslant u$.
   (d) Calculer $\varphi(1)$ et en déduire le signe de g' sur $D \setminus \{0\}$.

11. Étudier la limite de g en 1, et en déduire que g est prolongeable par continuité en 1, en précisant bien la valeur de ce prolongement en 1.

    Remarque : pour la suite du sujet, on notera également g ce prolongement.

12. Calculer $\lim_{x \to 0} g(x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe de g ?
13. Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
14. Déduire des questions précédentes les variations de g, en faisant bien apparaître les différentes limites calculées précédemment.
15. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ suivant la valeur de $x \in D \setminus \{0\}$, et en déduire la position relative de la courbe de g par rapport à celle de f.
16. Pour $a > 1$, on note $\mathcal{A}(a)$ l'aire du domaine délimité par les courbes de f et de g, ainsi que par les droites d'équations $x = a$ et $x = a^2$. Montrer que $\mathcal{A}(a)$ ne dépend pas de a, et donner sa valeur.

Partie 4 : Solutions d'une seconde équation différentielle

On considère ici l'équation différentielle (E_3) : $xy'(x) + y(x) = f(x)$. On cherche les solutions de (E_3) sur $J =]0;1[$, dont on étudie les comportements en 0 et en 1.

On considère $H : x \mapsto \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

17. Donner l'ensemble de définition de H.
18. Montrer que H est solution de E_3.
19. Étude de H en 0 :
    (a) Montrer que, pour tout $x \in J$ on a : $0 \geqslant H(x) \geqslant f(x)$.
    (b) En déduire la limite de H en 0, puis que H est l'unique solution de (E_3) prolongeable par continuité en 0.

    Remarque : pour la suite du sujet, on notera également H ce prolongement.

    (c) En déduire également que H est dérivable en 0, et calculer sa dérivée en 0.
    (d) À l'aide des questions précédentes, montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.
20. Étude de H en 1 :
    (a) Montrer que, pour tout $x \in [\frac{1}{2};1[$, on a : $f(x) \leqslant \dfrac{1}{4x\ln(x)}$.
    (b) En déduire la limite de H en 1.
    (c) Existe-t-il des solutions de (E_3) prolongeables par continuité en 1 ?