DS n^{o}2

I Sommes et sommes doubles

Exercice 1

1. Somme arithmétique : $\displaystyle\sum_{i=3}^{n-1} 4i-5 = \frac{7+4n-9}{2}\cdot(n-3) = (2n-1)(n-3)$
2. Binôme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2n)^k = (2n+1)^n$
3. Somme géométrique de raison $3\neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} 3^{n+k-1} = 3^n\frac{1-3^{n+2}}{1-3} = \frac{1}{2}\left(3^{2n+2}-3^n\right)$
4. Somme géométrique de raison $4^{-2}=\frac{1}{16}\neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 4^{n-2k} = 4^{n-4}\frac{1-4^{4-2n}}{1-4^{-2}} = \frac{4^{n-2}}{15}(1-4^{4-2n}) = \frac{4^{n-2}-4^{2-n}}{15}$
5. Somme géométrique de raison $2\neq 1$: $\displaystyle\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\frac{2^{n-2}-1}{2-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}(2^{n-2}-1) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
6. Somme géométrique de raison $(x-1)$. Et donc :
   - si $x=2$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n+1} 2 = 2(n+2)$
   - si $x\neq 2$: alors $(x-1)\neq 1$ et : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x(x-1)^k = x\cdot\frac{1-(x-1)^{n+2}}{1-(x-1)} = \frac{x}{2-x}\left(1-(x-1)^{n+2}\right)$
7. Pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a :
$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$
   et ainsi par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!} = 1-\frac{1}{(n+3)!}$
8. Binôme (après changement d'indice) :
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}4^{n-2k} = \sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}4^{n-2-2l} = 4^{-n}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}\underbrace{4^{2n-2-2l}}_{16^{n-1-l}} = 4^{-n}\left(1+16\right)^{n-1} = \frac{17^{n-1}}{4^n}$$
9. Télescopage : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-3}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-3}\ln(k+1)-\ln(k) = \ln(n-2)-\ln(1) = \ln(n-2)$
10. Faite en cours. On introduit la somme des coefficients binomiaux d'indice impairs, et on trouve : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k} = 2^{n-1}$
11. Faite en cours. On sépare la somme suivant la parité des indices, et on trouve : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor = n(n-1)$

12. Le terme d'indice $k=0$ est nul. Et pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a (formule du capitaine) :

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

et ainsi on a un binôme (après changement d'indice) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{l=0}^{n-1} \cdot \binom{n-1}{l} =$ $n2^{n-1}$.

Exercice 2

1. Pour $n=1$ on trouve 1.
   Pour $n=2$ on trouve : $1+\frac{1}{2}+1=\dfrac{5}{2}$.
   Et généralement :
   $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j}.$$
   On calcule suivant la seconde écriture : si j est fixé, alors par somme arithmétique :
   $$\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{j+1}{2}$$
   et à nouveau par somme arithmétique :
   $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = n \cdot \frac{1+\frac{n+1}{2}}{2} = \frac{n(n+3)}{4}$$
   Et on a bien le bon résultat pour $n=1$ et $n=2$.
2. Pour $n=1$ on trouve : 0 (somme vide).
   Pour $n=2$ on trouve : 2.
   Et généralement :
   $$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} ij = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} ij$$
   Calculons suivant la seconde écriture (ici on pouvait calculer suivant les deux) : si j est fixé, alors par somme arithmétique :
   $$\sum_{i=1}^{j-1} ij = \frac{j+j^2-j}{2}(j-1) = \frac{j^2(j-1)}{2} = \frac{j^3}{2} - \frac{j^2}{2}$$
   et par linéarité on a :
   $$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^3}{2} - \frac{j^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{24}\left(3n(n+1) - 2(2n+1)\right)$$
   $$= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$
   en factorisant par $n-1$ (1 est racine évidente).
   Et on a bien le bon résultat pour $n=1$ et $n=2$.

3. Pour $n=1$ on trouve : $1+1+1+0=3$.

   Pour $n=2$ on trouve : $1+1+1+1+1+2+0+0+0=7$.

   Et généralement :
$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{i}{j}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{j}$$
   et on préfère sommer suivant la première écriture, comme on reconnait un binôme : à i fixé, on a :
$$\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}=2^i$$
   et ainsi, par somme géométrique de raison $2\neq 1$:
$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{i}{j}=\sum_{i=0}^{n}2^i=1\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1.$$
   Et on a bien le bon résultat pour $n=1$ et $n=2$.

4. Pour $n=1$ on trouve 2.

   Pour $n=2$ on trouve $6+8=14$.

   Ici, on n'a pas de somme double, mais on la fait apparaître artificiellement en utilisant (comme dans le cours) que $k=\sum_{l=0}^{k-1}1$. Et ainsi :
$$\sum_{k=0}^{n}k\cdot 2^k\cdot 3^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k-1}2^k3^{n-k}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l+1}^{n}2^k3^{n-k}.$$
   La somme interne est une somme géométrique de raison $\dfrac{2}{3}\neq 1$, et donc à l fixé :
$$\sum_{k=l+1}^{n}2^k3^{n-k}=2^{l+1}3^{n-l-1}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=2^{l+1}3^{n-l}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l}\right)=2^{l+1}\left(3^{n-l}-2^{n-l}\right)=2\cdot 3^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{l}-2^{n+1}.$$
   Et on calcule la dernière somme avec une somme géométrique de raison $\frac{2}{3}\neq 1$ et une somme de termes constants, ce qui donne :
$$\sum_{k=0}^{n}k\cdot 2^k\cdot 3^{n-k}=\sum_{l=0}^{n}2\cdot 3^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{l}-2^{n+1}=2\cdot 3^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-(n+1)2^{n+1}=2\cdot 3^{n+1}-2^{n+2}-(n+1)2^{n+1}$$
$$=2\cdot 3^{n+1}-(n+3)2^{n+1}.$$
   Et on a bien le bon résultat pour $n=1$ et $n=2$.

5. Si $n=1$, on trouve : 1 (par binôme)

   Si $n=2$, on trouve $2+(2^m-1)=2^m$ (par binôme aussi)

   On échange les signes somme pour faire apparaître un binôme :
$$\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m}{l}k^l=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\binom{m}{l}k^l$$

et on a à k fixé :

$$\sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} k^l = \left(\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} k^l \right) - k^m = (k+1)^m - k^m$$

et ainsi par télescopage :

$$\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{l} k^l = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} k^l = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^m - k^m = n^m$$

Exercice 3

1. $$\sum_{k=0}^{n} k^0 = n+1,\ \sum_{k=0}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
2. Par télescopage, on a directement : $T_n = (n+1)^5$.
3. Par formule du binôme, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$(k+1)^5 - k^5 = \left(\sum_{l=0}^{5} \binom{5}{l} k^l \right) - k^5 = \sum_{l=0}^{4} \binom{5}{l} k^l$$

   Et en réinjectant dans l'expression de T_n, on a bien l'égalité demandée.
4. On déduit, en échangeant les signes somme et par linéarité :

$$T_n = \sum_{l=0}^{4} \sum_{k=0}^{n} \binom{5}{l} k^l = 1 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} k^0 \right) + 5 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} k^1 \right) + 10 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 \right) + 10 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} k^3 \right) + 5S_n$$

   Et ainsi :

$$5S_n = (n+1)^5 - (n+1) - 5\frac{n(n+1)}{2} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

   donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n+1}{30} \big(6(n+1)^4 - 6 - 15n - 10n(2n+1) - 15n^2(n+1) \big) \\ &= \frac{(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n)}{30} = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30} \end{aligned}$$

   ce qui est bien la forme voulue, avec $P(n) = 6n^3 + 9n^2 + n - 1$ qui est bien de la forme demandée.
   Remarque : le polynôme de degré 3 qui apparaît n'a pas de racine évidente : en fait il admet $-1/2$ pour racine, donc on pourrait le factoriser par $(2n+1)$. Mais on ne cherche pas à le factoriser davantage.

II Systèmes avec ou sans paramètre

Exercice 4

On procède à chaque fois par méthode du pivot. On trouve pour ensembles solutions :

1. $(2, -1, 3)$ comme unique solution
2. $(-1, 4, 2)$ comme unique solution
3. pas de solution
4. tous les triplets de la forme $\left(-\frac{2}{7} - z, \frac{3}{7}, z\right)$ pour $z \in \mathbb{R}$ comme solutions.

Exercice 5

On procède par pivot de Gauss à chaque fois :

1. On a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & ay & + & z & = & 2 \\ x & & & + & (1+a)z & = & 3 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 4 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc|l} x & - & ay & + & z & = & 2 & \\ & & ay & + & az & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & 2ay & + & 2z & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc|l} x & - & ay & + & z & = & 2 & \\ & & ay & + & az & = & 1 & \\ & & & & 2(1-a)z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}\right.$$

et on a donc les cas suivants :

— si $a = 1$: alors $2(a-1) = 0$ et la dernière ligne est toujours vérifiée. Par remontée, on trouve que les solutions du système sont les triplets :

$$(3 - 2z, 1 - z, z) \ \ z \in \mathbb{R}.$$

— si $a \neq 1$: alors $z = 0$ (dernière ligne), et le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - ay & = & 2 \\ ay & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne les sous-cas :

— si $a = 0$: il n'y a pas de solution (à cause de la deuxième ligne) ;

— si $a \neq 0$ (avec toujours $a \neq 1$) : alors le système possède comme unique solution le triplet : $(3, 1/a, 0)$.

2. On a de même :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & (1-a)y & + & (1-a)z & = & a^2 \\ ax & + & (1+a)y & + & (1+a)z & = & a - a^2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 - a \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc|l} x & + & y & + & z & = & 1 - a & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ ax & + & (1+a)y & + & (1+a)z & = & a - a^2 & \\ ax & + & (1-a)y & + & (1-a)z & = & a^2 & L_1 \leftrightarrow L_3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc|l} x & + & y & + & z & = & 1 - a & \\ & & y & + & z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ & & (1-2a)y & + & (1-2a)z & = & 2a^2 - a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc|l} x & + & y & + & z & = & 1 - a & \\ & & y & + & z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 2a^2 - a & L_3 \leftarrow L_3 - (1-2a)L_2 \end{array}\right.$$

et on a donc les cas suivants :

— si $a \notin \{0; 1/2\}$: alors $2a^2 - a \neq 0$ et la dernière ligne ne peut pas être vérifiée. Donc le système n'a pas de solution :
$$\forall a \notin \{0; 1/2\},\ S = \emptyset \ ;$$

— si $a = 0$: le système est donc équivalent à :
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$
donc les solutions peuvent s'exprimer à l'aide du paramètre $z \in \mathbb{R}$. On obtient par remontée :
$$y = -z \text{ et } x = 1$$
donc finalement :
$$\text{si } a = 1,\ S = \{(1, -z, z) \,|\, z \in \mathbb{R}\} \ ;$$

— si $a = 1/2$: le système est donc équivalent à :
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1/2 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$
et la même méthode que ci-dessus donne que :
$$\text{si } a = 1/2,\ S = \{(1/2, -z, z) \,|\, z \in \mathbb{R}\}.;$$

III Coefficients binomiaux

Exercice 6

1. Pour tous $k, p \in \mathbb{N}$ on a :
$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$$

2. On déduit ainsi que, pour tous $k, p \in \mathbb{N}$:
$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$$
et ainsi par télescopage :
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - \underbrace{\binom{p}{p+1}}_{=0 \text{ car } p+1>p} = \binom{n+1}{p+1}$$
ce qui prouve le résultat demandé.

Exercice 7

1. On a pour tout $p \in \{0, \ldots, n-1\}$:
$$\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} - \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{p+1}\right)$$
qui est donc du signe de :
$$\frac{1}{n-p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1)-(n-p)}{(n-1)(p+1)} = \frac{2p+1-n}{(n-1)(p+1)}$$
Et ainsi $\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1}$ est du signe de $(2p+1-n)$, c'est-à-dire :

— strictement positif si $p > \dfrac{n-1}{2}$;

— nul si $p = \dfrac{n-1}{2}$ (possible seulement si n est impair) ;

— strictement négatif si $p < \dfrac{n-1}{2}$.

2. Distinguons suivant la parité de n :

— si n est pair : posons $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Alors φ_n est :

— strictement croissante entre 0 et m ;

— strictement décroissante entre m et n.

Elle atteint son maximum en m, et seulement en m, et ce maximum vaut $\binom{n}{m} = \binom{n}{n/2}$.

— si n est impair : posons $n = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$. Alors φ_n est :

— strictement croissante entre 0 et m ;

— prend la même valeur en m et en $m + 1$;

— strictement décroissante entre $m + 1$ et n.

Elle atteint son maximum en m et en $m+1$, et pas ailleurs, et ce maximum vaut $\binom{n}{m} = \binom{n}{(n-1)/2}$.

Plus généralement, et peu importe la parité de n, le maximum de φ_n vaut donc : $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, et l'atteint en $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et en $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ (ces deux éléments étant égaux à $\frac{n}{2}$ lorsque n est pair.