DS n^{o}2

I Sommes et sommes doubles

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes (sous réserve que n soit suffisamment grand pour qu'elles aient un sens), en précisant bien à chaque fois la formule utilisée (somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique, somme quadratique ou cubique, somme télescopique, etc.) :

1. $\displaystyle\sum_{i=3}^{n-1} 4i-5$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2n)^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} 3^{n+k-1}$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 4^{n-2k}$
5. $\displaystyle\sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x(x-1)^k$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \frac{k}{(k+1)!}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}4^{n-2k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-3} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$

Exercice 2

On fixe $n, m \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes pour $n=1$ et $n=2$, puis en donner une expression générale en fonction de n :

1. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$
3. $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{i}{j}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k \cdot 3^{n-k}$
5. $\displaystyle\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{l} k^l$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4$.

1. Rappeler, sans les démontrer, les expressions de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^l$ en fonction de n pour $l = 0, 1, 2, 3$.
2. Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^5 - k^5$.
3. Justifier que : $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{4} \binom{5}{l} k^l$.
4. En déduire une expression de T_n en fonction de S_n, puis l'expression de S_n.

   Indication : on pourra chercher à écrire T_n à l'aide de S_n et des $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^l$ pour $l = 0, 1, 2, 3$.

   On donnera une expression de T_n sous la forme $\dfrac{n(n+1)P(n)}{30}$, où $P(n)$ est un polynôme en n de degré 3 à coefficients entiers que l'on donnera explicitement.

II Systèmes avec ou sans paramètre

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 11 \end{array}\right.$;

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & -7 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$;

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ x & + & 10y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$;

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ 4x & + & 5y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$;

Exercice 5

Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ des solutions des systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & ay & + & z & = & 2 \\ x & & & + & (1+a)z & = & 3 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 4 \end{array}\right.$;

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & (1-a)y & + & (1-a)z & = & a^2 \\ ax & + & (1+a)y & + & (1+a)z & = & a-a^2 \\ x & + & y & + & z & = & 1-a \end{array}\right.$.

III Coefficients binomiaux

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

1. Rappeler la formule de Pascal.
2. Conclure.
   Indication : on pourra chercher à faire apparaître un télescopage

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$:

1. Étudier, suivant la valeur de $p \in \{0, \dots, n-1\}$, le signe de $\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1}$.
   On précisera bien pour quelles valeurs de n cette quantité peut être nulle.
2. En déduire les variations sur $\{0, \dots, n\}$ de la fonction $\varphi_n : p \mapsto \binom{n}{p}$.
   On précisera son maximum, en donnant sa valeur ainsi que les valeurs de p en lesquelles il est atteint.
   Indication : on pourra distinguer suivant la parité de n.