DS n^{o}1

I Exercices

Exercice 1

On procède par double implication :

— $\Leftarrow$: si $x=0$, alors pour tout $\varepsilon>0$ on a : $|x|=0\leqslant\varepsilon$ (c'est même une inégalité stricte).
D'où la première implication.

— $\Rightarrow$: procédons par contraposée. Montrons donc : $x\neq 0\Rightarrow(\exists\varepsilon>0,\ |x|>\varepsilon)$.
Considérons donc $x\neq 0$, de sorte que $|x|>0$. Posons $\varepsilon=\dfrac{|x|}{2}$. Alors un tel ε vérifie bien $\varepsilon>0$ et $|x|>\varepsilon$.
Ce qui prouve la contraposée, donc la seconde implication.

D'où l'équivalence cherchée.

Exercice 2

On procède par double implication :

— si f est bornée : notons $m,M\in\mathbb{R}$ un minorant et un majorant de f. Soient $x,y\in I$. On a :

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \text{ et } m\leqslant f(y)\leqslant M.$$

En multipliant la seconde inégalité par $-1(<0)$, on a ainsi :

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \text{ et } -M\leqslant -f(y)\leqslant -m.$$

Et en additionnant, on a finalement :

$$m-M\leqslant f(x)-f(y)\leqslant M-m$$

ce qui prouve la propriété voulue avec $\boxed{a=m-M \text{ et } b=M-m}$.

— Si f vérifie la propriété de l'énoncé : considérons $x\in I$ quelconque, et fixons $y\in I$. Alors :

$$a\leqslant f(x)-f(y)\leqslant b$$

et donc :

$$a+f(y)\leqslant f(x)\leqslant b+f(y)$$

donc f est bornée comme elle est minorée (par $a+f(y)$) et majorée (par $b+f(y)$).

Ce qui prouve bien l'équivalence.

Exercice 3

1. On procède par équivalences. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$|2x-2|\leqslant x^2-1\Leftrightarrow 1-x^2\leqslant 2x-2\leqslant x^2-1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}1-x^2&\leqslant&2x-2\\2x-2&\leqslant&x^2-1\end{array}\right.$$

et on va résoudre séparément chaque inéquation.

— pour la première :

$$1-x^2\leqslant 2x-2\Leftrightarrow 0\leqslant x^2+2x-3$$

donc est ramené à étudier le signe de $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, qui est positif à l'extérieur de ses racines (comme le coefficient dominant est $1>0$), donc sur : $]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$;

— pour la seconde :
$$2x-2 \leqslant x^2-1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2-2x+1=(x-1)^2$$
et l'inégalité est donc toujours vérifiée.

Et finalement l'ensemble solution est : $\boxed{]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[}$.

2. Notons que l'égalité a un sens seulement pour $x \geqslant 2$ à cause de la racine.
Procédons par analyse–synthèse.
Considérons $x \geqslant 2$ une solution. Alors :
$$\sqrt{x-2}=x+1 \text{ donc en mettant au carré } x-2=(x+1)^2=x^2+2x+1 \text{ donc } 0=x^2+x+3$$
et on reconnaît un polynôme de discriminant : $\Delta=1^2-4\cdot 3\cdot 1=1-12=-11<0$. Qui n'admet pas de racine.
Et donc l'équation n'admet pas de solution : $\boxed{S=\emptyset}$.

Exercice 4

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   — initialisation : si $n=1$, alors :
$$\sum_{k=1}^{n} k \times (k+1) = 1 \times 2 = 2 \text{ et } \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$$
   ce qui prouve le résultat pour $n=1$.
   — hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^{n} k \times (k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Alors :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \times (k+1) &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \times (k+1)\right) + (n+1) \times (n+2) \\ &\overset{(HR)}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{3}(n+3) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}\end{aligned}$$
   ce qui prouve l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.
2. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   — initialisation : si $n=1$, alors :
$$\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = 1 \times 2^0 = 1 \text{ et } (n-1) \times 2^n + 1 = 0 \times 2 + 1 = 1$$
   ce qui prouve le résultat pour $n=1$.
   — hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1$. Alors :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1}\right) + (n+1)2^{n+1-1} \\ &\overset{(HR)}{=} (n-1) \times 2^n + 1 + (n+1) \times 2^n \\ &= (n-1+n+1)2^n + 1 = 2n \times 2^n + 1 = n \times 2^{n+1} + 1 \\ &= ((n+1)-1) \times 2^{n+1} + 1\end{aligned}$$
   ce qui prouve l'hérédité.

<u>D'où le résultat par récurrence.</u>

Exercice 5

Posons $x = \lfloor x \rfloor + r_1$ et $y = \lfloor y \rfloor + r_2$ avec $r_1, r_2 \in [0;1[$. Raisonnons par disjonction de cas :

— <u>1er cas</u> : si $r_1, r_2 \in [0;1/2[$. Alors :

$$x+y = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \underbrace{r_1+r_2}_{\in[0;1[},\ 2x = 2\lfloor x \rfloor + \underbrace{2r_1}_{\in[0;1[} \text{ et } 2y = 2\lfloor y \rfloor + \underbrace{2r_2}_{\in[0;1[}$$

et ainsi, par définition de la partie entière :

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor,\ \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \text{ et } \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$$

ce qui prouve bien l'inégalité, qui est même une égalité.

— <u>2ème cas</u> : si $r_1 \in [1/2;1[$ et $r_2 \in [0;1/2[$. Alors :

$$x+y = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \underbrace{r_1+r_2}_{\in[1/2;3/2[},\ 2x = 2\lfloor x \rfloor + \underbrace{2r_1}_{\in[1;2[} \text{ et } 2y = 2\lfloor y \rfloor + \underbrace{2r_2}_{\in[0;1[}$$

et ainsi, par définition de la partie entière :

$$\lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1,\ \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$$

ce qui donne finalement :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 + \lfloor y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

et on retrouve l'inégalité voulue.

— <u>3ème cas</u> : si $r_1 \in [0;1/2[$ et $r_2 \in [1/2;1[$. Alors les mêmes calculs que ci-dessus, en échangeant les rôles de x et y, donnent l'inégalité demandée.

— <u>4ème cas</u> : si $r_1, r_2 \in [1/2;1[$. Alors :

$$x+y = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \underbrace{r_1+r_2}_{\in[1;2[},\ 2x = 2\lfloor x \rfloor + \underbrace{2r_1}_{\in[1;2[} \text{ et } 2y = 2\lfloor y \rfloor + \underbrace{2r_2}_{\in[1;2[}$$

et ainsi, par définition de la partie entière :

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1,\ \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$$

et finalement :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 + \lfloor y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 1 \leqslant 2\lfloor x \rfloor + 1 + 2\lfloor y \rfloor + 1 = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

Exercice 6

1. On cherche à montrer que, si tous les réels x_i sont compris entre 0 et 1, alors il en existe deux consécutifs éloignés d'au plus $\dfrac{1}{n}$.

2. La contraposée est : si tous les x_i consécutifs sont éloignés d'au moins $\dfrac{1}{n}$, alors les x_i ne sont pas tous dans $[0;1]$.
   Ce qui donne en symboles mathématiques :

$$\boxed{\left(\forall i \in \{0,\dots,n-1\},\ x_{i+1} - x_i > \frac{1}{n}\right) \Rightarrow (\exists i \in \{0,\dots,n\},\ x_i \notin [0;1])}.$$

3. Montrons le par récurrence sur k :
   — initialisation : si $k=0$, alors $\sum_{i=0}^{k}(x_{i+1}-x_i) = x_{0+1}-x_0)x_1-x_0$ qui est bien l'égalité voulue, et prouve l'assertion au rang $k=0$.
   — hérédité : soit $k \in \{0,\dots,n-2\}$ tel que $\sum_{i=0}^{k}(x_{i+1}-x_i) = x_{k+1}-x_0$. Alors :
   $$\sum_{i=0}^{k+1}(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{k}(x_{i+1}-x_i) + x_{k+1+1} - x_{k+1} \overset{(HR)}{=} x_{k+1}-x_0+x_{k+2}-x_{k+1} = x_{k+2}-x_0$$
   ce qui prouve l'hérédité.

   Et on a bien le résultat par récurrence.
4. Pour montrer l'implication de l'énoncé, on montre sa contraposée.

   Supposons donc que : $\forall i \in \{0,\dots,n-1\},\ x_{i+1}-x_i > \dfrac{1}{n}$. Alors en sommant ces inégalités pour $i \in \{0,\dots,n-1\}$, on déduit :
   $$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) > \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}.$$
   La somme de gauche vaut x_n-x_0 par la question précédente. Celle de droite est la somme de n fois la quantité $\dfrac{1}{n}$, et vaut donc 1.

   Et finalement : $\boxed{x_n-x_0>1}$.

   Si tous les x_i étaient dans $[0;1]$, on aurait pourtant $x_n-x_0 \leqslant 1$. Et donc $\boxed{\text{l'un des } x_i \text{ n'est pas dans } [0;1]}$ (et même il s'agit nécessairement de x_0 ou de x_n).

Exercice 7

1. Par définition, on a :
   $$\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x \end{array}\right. .$$
   Posons $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
   $$f(n) + f(f(n)) = n + f(n) = n + n = 2n$$
   et ainsi $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ vérifie bien $(\star)$. En tant que fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, elle est donc solution du problème.
2. (a) Comme $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, alors : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant 0}$, ce qui montre déjà la première inégalité.
   Mais pour un tel n, on a également que : $f(f(n)) \in \mathbb{N}$, donc $f(f(n)) \geqslant 0$. Et ainsi :
   $$f(n) = 2n - f(f(n)) \leqslant 2n$$
   ce qui donne la seconde inégalité.
   D'où le résultat.

   (b) D'après la question précédente, on a :
   $$0 \leqslant f(0) \leqslant 2 \times 0 = 0$$
   et donc $\boxed{f(0)=0}$.

   (c) D'après la question a), on a déjà que :
   $$0 \leqslant f(1) \leqslant 2 \times 1 = 2$$
   et donc $f(1) = 0$, 1 ou 2.
   Supposons par l'absurde que $f(1) \neq 1$. Alors :

— 1er cas : $f(1) = 0$: on aurait alors $f(f(1)) = f(0) = 0$ et donc :

$$f(1) + f(f(1)) = 0 + 0 = 0 \neq 2$$

donc f ne vérifierait pas $(\star)$;

— 2ème cas : $f(1) = 2$: on aurait alors $f(f(1)) = f(2)$. Mais $f(2) \neq 0$, car sinon, du fait de $(\star)$, on aurait :

$$f(2) + f(f(2)) = 0 + f(0) = 0 \neq 2 \times 2$$

donc $f(2) > 0$. Et finalement :

$$f(1) + f(f(1)) = 2 + f(2) > 2 = 2 \times 1$$

donc f ne vérifierait pas $(\star)$.

Dans les deux cas, on arrive à une contradiction.
Et ainsi : $\boxed{f(1) = 1}$.

(d) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $f(m) = f(n)$. Alors :

$$2n = f(n) + f(f(n)) = f(m) + f(f(m)) = 2m$$

et ainsi $\boxed{n = m}$.
Ce qui prouve l'implication demandée.
On a ainsi montré aussi sa contraposée, à savoir que :

$$\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n \Rightarrow f(m) \neq f(n)}.$$

(e) Montrons le résultat par récurrence forte :

— initialisation : si $n = 0$, on a déjà montré que $f(0) = 0$, ce qui est l'initialisation.

— hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(0) = 0$, $f(1) = 1, \ldots, f(n) = n$. Montrons alors que $f(n+1) = n + 1$:

— soit $k \in \{0, \ldots, n\}$: par la question précédente, comme $n + 1 \neq k$, alors $f(n + 1) \neq f(k) = k$. Et ainsi : $f(n + 1) \geqslant n + 1$;

— le même argument donne que $f(m) \geqslant n + 1$ pour tout $m \geqslant n + 1$; en particulier, $f(f(n + 1)) \geqslant n + 1$;

— si $f(n + 1) \geqslant n + 2$, alors :

$$f(n + 1) + f(f(n + 1)) \geqslant (n + 2) + (n + 1) = 2n + 3 > 2(n + 1)$$

ce qui contredirait $(\star)$. Et ainsi $f(n + 1) \leqslant n + 1$.

Et ainsi : $\boxed{f(n + 1) = n + 1}$, ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence forte.

3. On a procédé par analyse–synthèse (ou plutôt synthèse–analyse d'ailleurs) : la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ est solution (d'après la question 1)), tandis que la question 2) montre que c'est la seule solution possible.
Et finalement la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ est l'unique solution au problème.

II Problème

II.1 Une preuve de l'inégalité de Cauchy–Schwarz

1. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est :

$$\boxed{\forall a_1, b_1 \in \mathbb{R},\ a_1 b_1 \leqslant \sqrt{a_1^2}\sqrt{b_1^2}}.$$

Elle est vraie car, par propriétés de la valeur absolue, pour tous $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ on a :

$$a_1 b_1 \leqslant |a_1 b_1| = |a_1||b_1| = \sqrt{a_1^2}\sqrt{b_1^2}.$$

2. (a) Développons les deux membres de l'égalité à montrer. On a d'une part :

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2$$
$$= \boxed{a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2}$$

et de même :

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = \boxed{a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2}$$

ce qui prouve bien l'égalité demandée.

(b) Soient $a_1, a_2b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leqslant |a_1b_1 + a_2b_2| = \sqrt{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}$$

mais par la question précédente on a :

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}_{\geqslant 0} \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

et donc par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\sqrt{(a_1b_1 + a_2b_2)^2} \leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

En combinant ces inégalités, on a finalement :

$$\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

ce qui était l'inégalité voulue.

Ceci étant vrai pour tous $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on déduit que la propriété $\boxed{\mathcal{P}(2) \text{ est vraie}}$.

3. (a) En appliquant la propriété $\mathcal{P}(n)$ aux $2n$ réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, on a :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

En ajoutant $a_{n+1}b_{n+1}$ à chaque membre de l'inégalité ci-dessus, on a bien l'inégalité demandée.

(b) Appliquons la propriété $\mathcal{P}(2)$ aux réels $A = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$, $B = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$, $C = a_{n+1}$ et $D = b_{n+1}$. On a donc : $AB + CD \leqslant \sqrt{A^2 + C^2}\sqrt{B^2 + D^2}$, ce qui donne avec les valeurs précédentes de A, B, C, D :

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} + a_{n+1}b_{n+1} \leqslant \sqrt{A^2 + a_{n+1}^2}\sqrt{B^2 + b_{n+1}^2}$$

$$\leqslant \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2+b_{n+1}^2}.$$

En reprenant l'inégalité de la question précédente, on a finalement que :

$$\boxed{a_1b_1+\cdots+a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1} \leqslant \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2+b_{n+1}^2}}.$$

Ceci étant vrai pour tous $a_1,\dots,a_{n+1},b_1,\dots,b_{n+1}\in\mathbb{R}$, on a bien montré que la propriété $\boxed{\mathcal{P}(n+1) \text{ est vérifiée}}$.

4. On a donc montré que $\boxed{\mathcal{P}(1) \text{ est vraie}}$ et que $\boxed{\mathcal{P} \text{ est héréditaire}}$: par principe de récurrence, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}}.$$

5. (a) Rappelons l'inégalité triangulaire : pour $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$, on a l'inégalité :

$$|x_1+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+\cdots+|x_n|$$

avec égalité si, et seulement si, tous les x_i sont de même signe.
En l'appliquant ici aux $x_i=a_ib_i$, on a bien l'inégalité demandée, avec égalité si, et seulement si :
— ou bien tous les x_i sont positifs : c'est-à-dire que <u>pour tout i, a_i et b_i sont de même signe</u> ;
— ou bien tous les x_i sont négatifs : c'est-à-dire que <u>pour tout i, a_i et b_i sont de signes opposés</u>.

(b) Considérons $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$.
Par la question précédente, on a :

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n| \leqslant |a_1||b_1|+\cdots+|a_n||b_n| \ .$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz aux réels $|a_1|,\dots,|a_n|,|b_1|,\dots,|b_n|$, on a de même :

$$|a_1||b_1|+\cdots+|a_n||b_n| \leqslant \sqrt{|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2}\sqrt{|b_1|^2+\cdots+|b_n|^2} = \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$$

en utilisant que $|x|^2=(\pm x)^2=x^2$.
En combinant les deux inégalités, il vient :

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n| \leqslant \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Dans cette dernière inégalité, <u>les deux membres sont positifs</u>. Par stricte croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x\mapsto x^2$, on peut donc préserver l'inégalité en mettant chaque membre au carré, donc :

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|^2 \leqslant \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}^{\,2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}^{\,2}$$

ce qui donne :

$$\boxed{(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)}$$

Ce qui prouve l'inégalité demandée.

(c) Supposons que l'on soit dans le premier cas : notons $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall i\in\{1,\dots,n\},\ a_i=\lambda b_i$.
Alors :

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 = (\lambda b_1^2+\cdots+\lambda b_n^2)^2 = \lambda^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)^2$$

et de même :

$$\begin{aligned}\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right) &= \left(\lambda^2b_1^2+\lambda^2b_2^2+\cdots+\lambda^2b_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\\ &= \lambda^2\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)^2\end{aligned}$$

ce qui donne bien que <u>l'inégalité de Cauchy–Schwarz est alors une égalité</u>.
Si on est dans le deuxième cas, la preuve est exactement la même (et revient en fait à échanger les rôles de a_i et b_i pour tout i).

II.2 Inégalités des moyennes

6. (a) On a :

$$\boxed{A_2(a,b)=\frac{a+b}{2},\ G_2(a,b)=\sqrt{ab},\ H_2(a,b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b},\ Q_2(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

et toutes ces quantités sont strictement positives, comme a, b le sont aussi.

(b) On montre séparément les trois inégalités, avec le cas d'égalité. Comme toutes les quantités à comparer sont positives, notons déjà qu'il suffit de comparer leurs carrés.

— $H_2(a,b) \leqslant G_2(a,b)$:

$$\begin{aligned} H_2(a,b) \leqslant G_2(a,b) &\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \\ &\Leftrightarrow \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leqslant ab \\ &\Leftrightarrow 4ab \leqslant (a+b)^2 \text{ en multipliant par } \frac{(a+b)^2}{ab} > 0 \\ &\Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2+2ab+b^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \end{aligned}$$

et la dernière inégalité est toujours vraie (un carré de réel est toujours positif ou nul), ce qui prouve bien que : $\boxed{H_2(a,b) \leqslant G_2(a,b)}$.

De plus, les mêmes calculs montrent que l'on a égalité si, et seulement si, $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a=b}$.

— $G_2(a,b) \leqslant A_2(a,b)$:

$$\begin{aligned} G_2(a,b) \leqslant A_2(a,b) &\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \\ &\Leftrightarrow ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} \\ &\Leftrightarrow 4ab \leqslant (a+b)^2 \text{ en multipliant par } 4>0 \\ &\Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2+2ab+b^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \end{aligned}$$

et à nouveau la dernière inégalité est vraie (c'est la même), ce qui prouve bien que : $\boxed{G_2(a,b) \leqslant A_2(a,b)}$.

Les mêmes calculs conduisent également à une égalité au départ si, et seulement si, $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a=b}$.

— $A_2(a,b) \leqslant Q_2(a,b)$:

$$\begin{aligned} A_2(a,b) \leqslant Q_2(a,b) &\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \\ &\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \leqslant 2a^2+2b^2 \text{ en multipliant par } 4>0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \end{aligned}$$

et à nouveau la dernière inégalité est vraie (c'est la même), ce qui prouve bien que : $\boxed{A_2(a,b) \leqslant Q_2(a,b)}$.

Les mêmes calculs conduisent également à une égalité au départ si, et seulement si, $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a=b}$.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{H_2(a,b) \leqslant G_2(a,b) \leqslant A_2(a,b) \leqslant Q_2(a,b)}$, avec égalité dans n'importe laquelle des inégalités si, et seulement si, $\boxed{a = b}$.

7. (a) Posons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x-1} - x$.

Les fonction exp, $x \mapsto x - 1$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables (fonctions usuelles ou polynomiales) sur $\mathbb{R}$, donc par composée et somme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = e^{x-1} - 1$$

et on a donc les variations suivantes pour f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(où on a rajouté les limites en $\pm\infty$ bien que celles-ci ne soient pas utiles)

Et on déduit ainsi des variations de f sur $\mathbb{R}$ que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant f(1) = 0$$

avec égalité si, et seulement si, $x = 1$.

Ce qui prouve bien que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant e^{x-1} \text{ avec égalité si, et seulement si, } x = 1}.$$

(b) Appliquons déjà l'inégalité précédente aux réels $\dfrac{a_i}{A_n(a_1, \ldots, a_n)}$. On a ainsi :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ 0 < \frac{a_i}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} \leqslant \exp\left(\frac{a_i}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} - 1\right)}$$

On peut multiplier toutes les inégalités (comme elles sont toutes positives et dans le même sens), ce qui donne :

$$0 < \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(A_n(a_1, \ldots, a_n))^n} \leqslant \exp\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} - n\right)$$

(par propriété de l'exponentielle sur les produits)

Mais, par définition de A_n, on a :

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} - n = \frac{nA_n(a_1, \ldots, a_n)}{A_n(a_1, \ldots, a_n)} - n = n - n = 0$$

et ainsi :

$$0 < \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(A_n(a_1, \ldots, a_n))^n} \leqslant 1.$$

En multipliant par $(A_n(a_1, \ldots, a_n))^n$ (qui est strictement positif), on déduit :

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant (A_n(a_1, \ldots, a_n))^n$$

et par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, on a finalement :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant A_n(a_1, \ldots, a_n).$$

Et ainsi on a bien : $\boxed{G_n(a_1,\dots,a_n) \leqslant A_n(a_1,\dots,a_n)}$.

Pour le cas d'égalité, la stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ impose que l'on a égalité à la fin si, et seulement si, on a égalité à chaque étape du calcul. C'est-à-dire si, et seulement si, pour tout i on a :

$$\frac{a_i}{A_n(a_1,\dots,a_n)} \leqslant \exp\left(\frac{a_i}{A_n(a_1,\dots,a_n)} - 1\right).$$

Par la question précédente, c'est le cas si, et seulement si, pour tout i :

$$\frac{a_i}{A_n(a_1,\dots,a_n)} = 1$$

et donc :

$$\boxed{a_1 = a_2 = \cdots = a_n = A_n(a_1,\dots,a_n)}.$$

Nécessairement, s'il y a égalité, alors tous les a_i sont égaux.

Réciproquement, supposons que tous les a_i sont égaux. Posons $a \in \mathbb{R}_+^*$ leur valeur commune. Alors :

$$A_n(a_1,\dots,a_n) = \frac{a + a + \cdots + a}{n} = \frac{na}{n} = a$$

et donc on a bien $a_1 = \cdots = a_n = A_n(a_1,\dots,a_n)$, car toutes ces quantités valent a.

Et finalement : il y a égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux.

8. (a) Par définition, on a :

$$\boxed{H_n(a_1,\dots,a_n)} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}} \boxed{= \frac{1}{A_n\left(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}\right)}}.$$

(b) Appliquons le résultat précédents aux $\dfrac{1}{a_i}$. On a ainsi :

$$G_n\left(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}\right) \leqslant A_n\left(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}\right)$$

avec égalité si, et seulement si, les $\frac{1}{a_i}$ (donc tous les a_i) sont égaux.

Mais $G_n\left(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}\right)$, $A_n\left(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}\right)$ sont strictement positifs : par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc :

$$\underbrace{\frac{1}{A_n\left(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}\right)}}_{H_n(a_1,\dots,a_n)} \leqslant \frac{1}{G_n\left(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}\right)}$$

avec égalité si, et seulement, les a_i sont égaux.

Mais on a aussi :

$$\frac{1}{G_n\left(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}}} = \sqrt[n]{a_1\dots a_n} = G_n(a_1,\dots,a_n).$$

Et finalement, on trouve bien :

$$\boxed{H_n(a_1,\dots,a_n) \leqslant G_n(a_1,\dots,a_n)}$$

avec égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux.

9. Appliquons l'inégalité de Cauchy–Schwarz aux réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, 1, 1, \ldots, 1$. On a :

$$(a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 1)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)$$

c'est-à-dire :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot n$$

et par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ (comme tout est positif ci-dessus) :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{n}$$

et en divisant par $n > 0$, on trouve :

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}}_{=A_n(a_1,\ldots,a_n)} \leqslant \underbrace{\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}}_{=Q_n(a_1,\ldots,a_n)}$$

ce qui est l'inégalité demandée.
Pour le cas d'égalité, on a donc égalité dans la dernière inégalité si, et seulement si, l'inégalité de Cauchy–Schwarz que l'on a utilisée est une égalité. Par le résultat de la première partie, c'est le cas si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ a_i = \lambda) \text{ ou } (\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ 1 = \lambda a_i)$$

ce qui donne dans les deux cas que tous les a_i sont égaux (dans le premier cas égaux à λ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, et dans le second à $\frac{1}{\lambda}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$).

II.3 Quelques applications

10. Notons S la surface que l'on fixe. Considérons a, b, c les longueurs des trois côtés du parallélépipède rectangle considéré.
On a ainsi : $S = 2(ab + bc + ca)$.
Le volume du parallélépipède est de $V = abc$.
Par la question 7, on a :

$$G_3(ab, bc, ca) = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{V^2} \leqslant \frac{ab + bc + ca}{3} = \frac{S}{6}.$$

Par croissance de la racine carrée, on a donc :

$$\sqrt[3]{V} \leqslant \sqrt{\frac{S}{6}}$$

et par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$:

$$\boxed{V \leqslant \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3 = \sqrt{\frac{S^3}{216}}}.$$

Reste à montrer que c'est une égalité si, et seulement si, on a un cube. Mais d'après la condition d'égalité de la question 7, on a une égalité si, et seulement si : $ab = bc = ca$, c'est-à-dire $a = b = c$. C'est bien la situation du cube !
On peut vérifier d'ailleurs que l'on a bien égalité pour le cube : si on a un cube de côté a, alors : $S = 6a^2$ et $V = a^3$ et on a bien :

$$V = a^3 \text{ et } \sqrt{\frac{S^3}{216}} = \sqrt{a^6} = a^3.$$

11. Considérons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels strictement positifs de somme 1. Pour tout i, posons $a_i = \sqrt{\alpha_i}$ et $b_i = \frac{1}{a_i} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}}$.
Appliquons l'inégalité de Cauchy–Schwarz aux réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. On a :

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1 b_1}_{=1} + \cdots + \underbrace{a_n b_n}_{=1}\right)^2}_{=n^2} \leqslant \underbrace{\left(\underbrace{a_1^2}_{=\alpha_1} + \cdots + \underbrace{a_n^2}_{=\alpha_n}\right)}_{=1} \underbrace{\left(\underbrace{b_1^2}_{=1/\alpha_1} + \cdots + \underbrace{b_n^2}_{=1/\alpha_n}\right)}_{=\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}.$$

Et finalement, on trouve que :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n} \geqslant n^2}$$

comme demandé.
Remarque : ce n'est pas demandé, mais on a égalité si, et seulement si, tous les α_i sont égaux. On veut en effet, pour avoir égalité, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout i : $\sqrt{\alpha_i} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha_i}}$, c'est-à-dire que $\alpha_i = \lambda$.