DS n^{o}11

I Exercices

Exercice 1

1. On considère $f : x \mapsto \dfrac{x^5}{1+x^3}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f, et justifier qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (b) Montrer que :
   $$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1-\ln(2)}{3}.$$
   (c) En déduire la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} \frac{k^5}{k^3+n^3}$.
2. On considère la suite (u_n) et la fonction f définie respectivement par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ et } f : x \mapsto \ln(1+x).$$
   (a) Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, et montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$
   (c) En déduire la limite de (u_n).
   Indication : on pourra appliquer l'inégalité de Taylor–Lagrange à f entre 0 et 1.

Exercice 2

On se donne n un entier avec $n \geqslant 2$, et on considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n. On y tire avec remise et indépendamment $(n+1)$ boules. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

La variable aléatoire X_n prend dont ses valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$. Par exemple, pour $n = 5$, si les tirages amènent successivement les numéros $5, 3, 2, 2, 6, 3,$ alors $X_5 = 4$.

De plus, pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ème tirage. Dans l'exemple précédent, on a donc : $N_1 = 5, N_2 = 3, \dots, N_6 = 3$.

1. Pour cette question **uniquement** on suppose que $n = 3$. L'urne contient donc des boules numérotées $1, 2, 3$.
   (a) Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ uniquement à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}(X_3 = 4)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}(X_3 = 3)$.
   (c) Calculer l'espérance de X_3.

   Pour toute la suite, on fixe n entier avec $n \geqslant 2$.
2. Pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k. Montrer que son espérance vaut $\dfrac{n+1}{2}$ et que sa variance vaut $\dfrac{n^2-1}{12}$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n+1)$.
4. Montrer que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$: $\mathbb{P}_{(N_1 = i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-i+1}{n}$.
5. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
6. Pour $k \in [\![2; n]\!]$, justifier l'égalité des événements : $(X_n > k)$ et $(N_1 > N_2 > \cdots > N_k)$, et en déduire que : $\mathbb{P}(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
7. Montrer que l'égalité précédente reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
8. Pour $k \in [\![2; n+1]\!]$, exprimer $\mathbb{P}(X_n = k)$ à l'aide de $\mathbb{P}(X_n > k-1)$ et de $\mathbb{P}(X_n > k)$.
9. En déduire que $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n > k)$, puis calculer $E(X_n)$.
10. Montrer que : $\forall k \in [\![2; n+1]\!],\ \mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

II Problème

Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice J_n de taille n à coefficients réels dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$:

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est noté $\mathbf{v}$.

II.1 Réduction de J_n

1. Calculer $J_n\mathbf{v}$.
2. Déterminer l'image de J_n, en explicitant une base ainsi que la dimension. En déduire la dimension du noyau de J_n.
3. On note (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_{n-1})$, définie par $f_i = e_i - e_n$ pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, est libre. En déduire une base de $\mathrm{Ker} J_n$.
4. Calculer J_n^2.
5. Soit $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale suivante :

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) On considère $(e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker} J_n$. Montrer que $(\mathbf{v}, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   (b) En déduire qu'il existe $P_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $J_n = P_n D_n P_n^{-1}$.

II.2 Une équation autour du déterminant

On fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation (E) d'inconnue le réel x :

$$\det(M + xJ_n) = 0. \qquad (E)$$

On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).

6. On suppose pour cette question uniquement que $M = 0$ (la matrice nulle) : déterminer $\mathcal{S}_E$.
7. On suppose pour cette question uniquement que $M = I_n$, où I_n désigne la matrice identité.
   (a) À l'aide de la question 4., calculer $\det(I_n + xJ_n)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\mathcal{S}_E$ est réduit à un unique élément, que l'on précisera.
8. On suppose pour cette question que M inversible. On fixe $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que tout vecteur $\mathbf{w}$ dans le noyau de $M + xJ_n$ est colinéaire au vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$.
   (b) Soit $\mathbf{w} = M^{-1}\mathbf{v}$. On notant σ la somme des coordonnées du vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$, démontrer l'équivalence :
   $$(M + xJ_n)\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow (1 + x\frac{\sigma}{n}) = 0.$$
   En déduire que $\mathcal{S}_E$ est au plus de cardinal 1. Pour quelles valeurs de σ, l'ensemble $\mathcal{S}_E$ est-il vide ?
9. On suppose pour cette question que M est non inversible.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}_E$ est non vide.
   (b) S'il existe un réel b tel que $M + bJ_n$ est inversible, établir une bijection entre $\mathcal{S}_E$ et l'ensemble des solutions de l'équation (F) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ définie par :
   $$\det(M + bJ_n + xJ_n) = 0. \qquad (F)$$
   (c) Conclure.
10. On pose $f : x \mapsto \det(M + xJ_n)$. Montrer que f est affine, et donner son ordonnée à l'origine en fonction de M. Retrouver les résultats des questions précédentes.