DS n^{o}1

À lire attentivement avant de faire quoi que ce soit :

- toutes les consignes de rédaction et de présentation données dans le DM1 sont valables
- la notation tiendra très fortement compte de la rédaction
- les exercices sont indépendants, et se veulent progressifs dans la difficulté (ce dernier point n'est pas un absolu comme la notion de difficulté est très subjective)
- il faut bien lire les questions et s'assurer d'y avoir bien répondu (surtout quand les questions comportent différentes parties)
- le problème est indépendant des exercices
- il est préférable d'en faire peu, mais bien, plutôt que beaucoup, mais mal
- il ne faut pas hésiter à passer une question qui semble trop difficile : les résultats d'une question, même s'ils n'ont pas été démontrés, peuvent alors être utilisés dans la suite de l'exercice

I Exercices

Exercice 1

Étant donné x un réel, montrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon) \Leftrightarrow x = 0.$$

Exercice 2

On considère f une fonction définie sur I. Montrer que f est bornée si, et seulement si :

$$\exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in I,\ a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b.$$

Exercice 3

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $|2x - 2| \leqslant x^2 - 1$;
2. $\sqrt{x-2} = x + 1$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times (k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
2. $1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + n \times 2^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1$.

Exercice 5

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor.$$

Indication : On pourra raisonner suivant les valeurs de $x - \lfloor x \rfloor$ et de $y - \lfloor y \rfloor$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels rangés par ordre croissants : $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n$.
On souhaite montrer l'implication suivante :

$$(\forall i \in \{0, \dots, n\},\ x_i \in [0;1]) \Rightarrow \left(\exists i \in \{0, \dots, n-1\},\ x_{i+1} - x_i \leqslant \frac{1}{n}\right).$$

1. Expliquer en français l'implication que l'on cherche à montrer.
2. Énoncer sa contraposée en français, et avec des symboles mathématiques.
3. Montrer que : $\forall k \in \{0, \dots, n-1\},\ \sum_{i=0}^{k} (x_{i+1} - x_i) = x_{k+1} - x_0$.
4. Montrer l'implication de l'énoncé.

Exercice 7

On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + f \circ f(n) = 2n \qquad (\star)$$

1. Rappeler la définition de la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et vérifier qu'elle est bien solution du problème.
2. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifie l'assertion $(\star)$:
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant f(n) \leqslant 2n$.
   (b) Déterminer $f(0)$.
   (c) Montrer que $f(1) = 1$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde.
   (d) Montrer que :
   $$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m) = f(n) \Rightarrow m = n$$
   et énoncer sa contraposée.
   (e) Déduire des questions précédentes que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n.$$
   Indication : on pourra procéder par récurrence forte.
3. Conclure.

II Problème

Le but de ce problème est de montrer, par différentes méthodes, quelques inégalités classiques.

II.1 Une preuve de l'inégalité de Cauchy–Schwarz

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R},\ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

1. Énoncer et prouver $\mathcal{P}(1)$.
2. (a) Soient a_1, a_2, b_1, b_2 quatre réels. Montrer que $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$.
   (b) En déduire que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
3. On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire. On considère donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   (a) On considère les $(2n+2)$ réels $a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_{n+1}$. Montrer que :
   $$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} \leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} + a_{n+1}b_{n+1}.$$
   (b) En utilisant éventuellement $\mathcal{P}(2)$, en déduire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
4. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
5. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer que :
   $$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \leqslant |a_1||b_1| + \cdots + |a_n||b_n|$$
   et préciser le cas d'égalité.
   (b) En déduire **l'inégalité de Cauchy–Schwarz** : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$:
   $$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right).$$
   (c) Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz dès lors que les a_i sont proportionnels aux b_i suivant un même rapport, c'est-à-dire que :
   $$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ (\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ a_i = \lambda b_i)\ \text{ou}\ (\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ b_i = \lambda a_i).$$
   Remarque : on pourra admettre que c'est la seule condition possible pour que l'inégalité de Cauchy–Schwarz soit une égalité.

II.2 Inégalités des moyennes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, on définit leur :

— **moyenne arithmétique** : $A_n(a_1, \ldots, a_n) = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$;

— **moyenne géométrique** : $G_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}$;

— **moyenne harmonique** : $H_n(a_1, \ldots, a_n) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$;

— **moyenne quadratique** : $Q_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$.

On souhaite dans cette partie comparer ces quatre quantités.

6. On s'intéresse ici au cas $n = 2$. On fixe $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Calculer $A_2(a,b), G_2(a,b), H_2(a,b), Q_2(a,b)$. Que penser du signe de ces quantités ?
   (b) Montrer que :
   $$H_2(a,b) \leqslant G_2(a,b) \leqslant A_2(a,b) \leqslant Q_2(a,b)$$
   avec égalité dans chaque inégalité si, et seulement si, $a = b$.
   Indication : on pourra commencer par constater que toutes les quantités à comparer sont strictement positives, et chercher à faire apparaître des identités remarquables

Pour toute la suite de cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$:

7. On souhaite montrer que $G_n(a_1, \dots, a_n) \leqslant A_n(a_1, \dots, a_n)$:
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \leqslant e^{x-1}$, et donner le cas d'égalité.
   Indication : on pourra étudier les variations de $x \mapsto e^{x-1} - x$.
   (b) En déduire l'inégalité voulue, ainsi que la situation d'égalité.
   Indication : on pourra appliquer l'inégalité précédente aux réels $\dfrac{a_i}{A_n(a_1, \dots, a_n)}$ et utiliser la stricte croissance sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
8. On souhaite montrer que $H_n(a_1, \dots, a_n) \leqslant G_n(a_1, \dots, a_n)$:
   (a) Déterminer une relation entre $H_n(a_1, \dots, a_n)$ et $A_n(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n})$.
   (b) En utilisant l'inégalité entre A_n et G_n montrée à la question précédente, en déduire l'inégalité voulue, ainsi que la situation d'égalité.
9. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que : $A_n(a_1, \dots, a_n) \leqslant Q_n(a_1, \dots, a_n)$, et préciser la situation d'égalité.

II.3 Quelques applications

À l'aide des inégalités montrées précédemment, montrer que :

10. À surface fixée, le cube est le parallélépipède rectangle dont le volume est le plus grand.
11. Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et n réels positifs strictement de somme 1, la somme de leurs inverses est supérieure ou égale à n^2.