DS commun d'analyse

I Exercice

Exercice 1 1. Les montants sont tous les entiers de 1 à 6. On détermine les probabilités en utilisant que, pour $i \in \{1,2,3\}$, les familles $(P(X_i = j))_{j\in[\![1;6]\!]}$ forment des distributions de probabilité :

- pour le dé 1 : on a $P(X_1 = 6) = 2/3$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall j \in [\![1;5]\!],\ P(X_1 = j) = \alpha$. On déduit $\alpha = \dfrac{1-2/3}{5} = \dfrac{1}{15}$;
- pour les dés 2 et 3 : on a $P(X_2 = 6) = 1/3 = P(X_3 = 6)$ et il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall j \in [\![1;5]\!],\ P(X_2 = j) = \beta = P(X_3 = j)$. On déduit $\beta = \dfrac{1-1/3}{5} = \dfrac{2}{15}$.

Et finalement les lois des X_i sont des données par :

$$X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = X_3(\Omega) = [\![1;6]\!],\ P(X_1 = 6) = \frac{2}{3},\ P(X_2 = 6) = P(X_3 = 6) = \frac{1}{3}$$

$$\forall j \in [\![1;5]\!],\ P(X_1 = j) = \frac{1}{15} \text{ et } P(X_2 = j) = P(X_3 = j) = \frac{2}{15}.$$

2. D'après l'énoncé, on commence par tirer l'un des trois dés, et un seul : les événements (D_1, D_2, D_3) forment donc un recouvrement (on tire un dé) disjoint (et un seul), donc un système complet d'événements.

Notons déjà que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a : $Y_k(\Omega) = [\![1;6]\!]$. Par formule des probabilités totales associée au système complet d'événement (D_1, D_2, D_3), on a pour tout $j \in [\![1;6]\!]$:

$$P(Y_k = j) = P(D_1)P_{D_1}(Y_k = j) + P(D_3)P_{D_3}(Y_k = j) + P(D_3)P_{D_3}(Y_k = j).$$

On conclut en notant que :

- les dés étant indiscernables : $P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \dfrac{1}{3}$;
- par définition de Y_k, pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et tout $j \in [\![1;6]\!]$: $P_{D_i}(Y_k = j) = P(X_i = j)$.

Avec la question précédente, on a finalement :

$$P(Y_k = 6) = \frac{4}{9} \text{ et } \forall j \in [\![1;5]\!],\ P(Y_k = j) = \frac{1}{9}.$$

Remarque : on vérifie bien que la somme fait 1.

3. Par définition, on a : $P_{D_i}(A_1) = P(X_i = 6)$, et ainsi :

$$P_{D_1}(A_1) = \frac{2}{3} \text{ et } P_{D_2}(A_1) = P_{D_3}(A_1) = \frac{1}{3}.$$

Le constat est le même pour le deuxième lancer, et on déduit :

$$P_{D_1}(A_2) = \frac{2}{3} \text{ et } P_{D_2}(A_2) = P_{D_3}(A_2) = \frac{1}{3}.$$

Enfin, les lancers se faisant de manière indépendante, on a pour tout $i \in \{1,2,3\}$: $P_{D_i}(A_1 \cap A_2) = P_{D_i}(A_1)P_{D_i}(A_2) = P(X_i = 6)^2$. Et ainsi :

$$P_{D_1}(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{9} \text{ et } P_{D_2}(A_1 \cap A_2) = P_{D_3}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{9}.$$

4. Par formule des probabilités totales associée au système complet d'événement (D_1, D_2, D_3), on déduit :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(D_1)P_{D_1}(A_1 \cap A_2) + P(D_2)P_{D_2}(A_1 \cap A_2) + P(D_3)P_{D_3}(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{9}$$

ce qui est bien le résultat de l'énoncé.
On a également :

$$P(A_1) = P(Y_1 = 6) = \frac{4}{9} \text{ et } P(A_2) = P(Y_2 = 6) = \frac{4}{9}$$

et donc :

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{9} \neq \frac{16}{81} = P(A_1)P(A_2)$$

donc les événements A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

5. Par le même raisonnement que ci-dessus, on trouve par indépendance des lancers que :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\},\ P_{D_i}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = (P(X_i = 6))^k = \begin{cases} (2/3)^k & \text{si} \quad k = 1 \\ (1/3)^k & \text{si} \quad k = 2, 3 \end{cases}$$

puis à nouveau par formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements (D_1, D_2, D_3), on déduit :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2^k}{3^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^k} \right) = \frac{2^k + 2}{3^{k+1}}.$$

Par formule des probabilités composées (applicable comme $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \neq 0$), on déduit :

$$\frac{2^k + 2}{3^{k+1}} = P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k) = \frac{2^{k-1} + 2}{3^k} P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k)$$

et finalement :

$$P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k) = \frac{2^k + 2}{3(2^{k-1} + 2)}.$$

6. Par formule de Bayes, on a :

$$P_{A_1 \cap A_2}(D_1) = \frac{P_{D_1}(A_1 \cap A_2)P(D_1)}{P(A_1 \cap A_2)} = \frac{4/27}{2/9} = \frac{2}{3}.$$

On utilise également la formule de Bayes pour le cas général :

$$P_{A_1 \cap \cdots \cap A_k}(D_1) = \frac{P_{D_1}(A_1 \cap \cdots \cap A_k)P(D_1)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_k)} = \frac{(2/3)^k \cdot (1/3)}{(2^k + 2)/3^k} = \frac{2^k}{2^k + 2}.$$

Remarque : on retrouve la bonne valeur pour $k = 2$.

7. Comparons les probabilités de ces deux événements. Supposons que l'on n'a fait que des 6 aux k premiers lancers :
   — la probabilité de faire un 6 au lancer suivant est :

$$P_{A_1 \cap \cdots \cap A_k}(A_{k+1}) = \frac{2^{k+1} + 2}{3(2^k + 2)}.$$

   — celle que le dé choisi soit le dé 1 est :

$$P_{A_1 \cap \cdots \cap A_k}(D_1) = \frac{2^k}{2^k + 2}$$

Et on cherche donc à résoudre l'inégalité :

$$2^{k+1} + 2 \leqslant 3 \cdot 2^k$$

mais on a :

$$2^{k+1} + 2 \leqslant 3 \cdot 2^k \Leftrightarrow 2^{k+1} + 2 \leqslant 2^{k+1} + 2^k \Leftrightarrow 2 \leqslant 2^k \Leftrightarrow k \geqslant 1$$

et on a les mêmes équivalences avec des inégalités strictes. Et ainsi :

— si $k = 0$: il vaut mieux parier de faire un 6 au prochain (qui est le premier) lancer (cohérent car cette probabilité vaut $4/9$, donc plus que la probabilité de $1/3$ d'avoir choisi le dé 1) ;

— si $k = 1$: cela revient au même (ces probabilité valent $1/2$ chacune) ;

— si $k > 1$: il vaut mieux parier que l'on a tiré le dé 1.

II Problème

II.1 Première étude de f

1. Les fonctions Arctan (fonction usuelle) et $x \mapsto x$ (fonction polynomiale) sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x$ ne s'annulant qu'en 0, cela assure comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   Reste la continuité en 0. Mais pour $x \neq 0$, on a :
   $$f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} = \frac{\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(0)}{x - 0}$$
   qui tend donc vers $\operatorname{Arctan}'(0) = 1 = f(0)$ quand x tend vers 0. Ceci assure la continuité de f en 0.
   Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour $x \neq 0$, par imparité de Arctan et de $x \mapsto x$, on a :
   $$f(-x) = \frac{\operatorname{Arctan}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{Arctan}(x)}{-x} = f(x)$$
   ce qui assure que f est paire (la valeur en 0 n'ayant pas d'importance pour une fonction paire, on ne s'y est pas intéressé).
2. (a) On a le développement de Arctan en 0 suivant :
   $$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$
   et par quotient :
   $$f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)$$
   et la formule est valable en 0 comme $f(0) = 1$.

   (b) Par troncature, f admet un dl1 en 0, donc est dérivable en 0. Le coefficient de degré 1 étant nul, on a : $f'(0) = 0$ (cohérent avec le fait que f est paire), et la tangente à la courbe de f en 0 a pour équation $y = 1$.
   De plus, on a :
   $$f(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{3} \leqslant 0$$
   donc la courbe de f est sous sa tangente en 0 au voisinage de 0.

3. (a) Les fonctions Arctan (fonction usuelle) et $x \mapsto x$ (fonction polynomiale) sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme $x \mapsto x$ ne s'annule qu'en 0, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Par dérivée d'un quotient, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{\operatorname{Arctan}'(x)x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2} = \frac{x-(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x)}{(1+x^2)x^2}.$$

(b) On a déjà que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (avec l'expression ci-dessus de f' sur $\mathbb{R}^*$) et que $f'(0) = 0$. Il reste juste à prouver que f' est continue en 0, c'est-à-dire que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x)}{(1+x^2)x^2} = 0.$$

Mais on a le développement limité suivant (par développement usuel et produit) :

$$(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} (1+x^2)\left(x + \mathrm{o}(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x^2)$$

et en réinjectant :

$$f'(x) = \frac{x-(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x)}{(1+x^2)x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2+\mathrm{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\mathrm{o}(1)}{1+\mathrm{o}(1)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(1) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Ce qui prouve le résultat voulu.

Donc f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ entier.

Autre méthode : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ (avec les derniers calculs) : ceci assure, par théorème de limite de la dérivée, que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (déjà montré à la question précédente d'une autre manière), et que f' est continue en 0 (ce qu'on voulait montrer à cette question).

(c) On écrit :

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^2}\cdot t$$

et on procède par intégration par parties en primitivant $t \mapsto \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ (ce qui donne $t \mapsto -\dfrac{1}{(1+t^2)}$) et en dérivant $t \mapsto t$ (ce qui donne $t \mapsto 1$). Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{(1+t^2)}$ et $t \mapsto t$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, l'intégration par parties et licite, et donne :

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{Arctan}(x)\right)$$

ce qui est bien la formule voulue, en notant que pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$-\frac{1}{2}x^2 f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{x-(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x)}{(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{Arctan}(x)\right).$$

Autre méthode : on pouvait procéder sans intégration par parties. L'objectif était de montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{Arctan}(x)\right)$ est l'unique primitive de $t \mapsto \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$ qui s'annule en 0. La fonction φ s'annule clairement en 0, et est dérivable sur $\mathbb{R}$ (combinaison linéaire et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas) avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

ce qui prouve bien le résultat.

(d) On distingue suivant le signe de x :

- si $x = 0$: on a déjà vu que $f'(0) = 0$, qui est bien nul ;
- si $x > 0$: la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$ est positive, continue, et non identiquement sur le segment $[0;x]$. Ceci assure que :

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t > 0$$

et en divisant cette inégalité par $-\dfrac{1}{2}x^2 < 0$, on déduit que pour un tel x : $f'(x) < 0$ (en particulier f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$;

- si $x < 0$: on pourrait faire le même raisonnement, mais on peut aussi invoquer que, comme f est paire, alors f' est impaire, ce qui assure que : $f'(x) = -f'(-x) > 0$ (et ainsi f' ne s'annule pas non plus sur $\mathbb{R}_-^*$).

Autre méthode : la fonction $\varphi : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 f'(x)$ est donc l'unique primitive de $\psi : t \mapsto \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$ qui s'annule en 0. Mais ψ est positive sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant qu'en 0 (nombre fini de points d'annulation), donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\varphi(0) = 0$, on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(x) > 0 \text{ si } x > 0 \text{ et } \varphi(x) < 0 \text{ si } x < 0$$

ce qui donne le signe de f' en divisant par $-\dfrac{1}{2}x^2 < 0$ (pour $x \in \mathbb{R}^*$). Le cas $x = 0$ est à traiter à part, et on avait bien prouvé que $f'(0) = 0$.

(e) Finalement, on déduit les variations suivantes de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

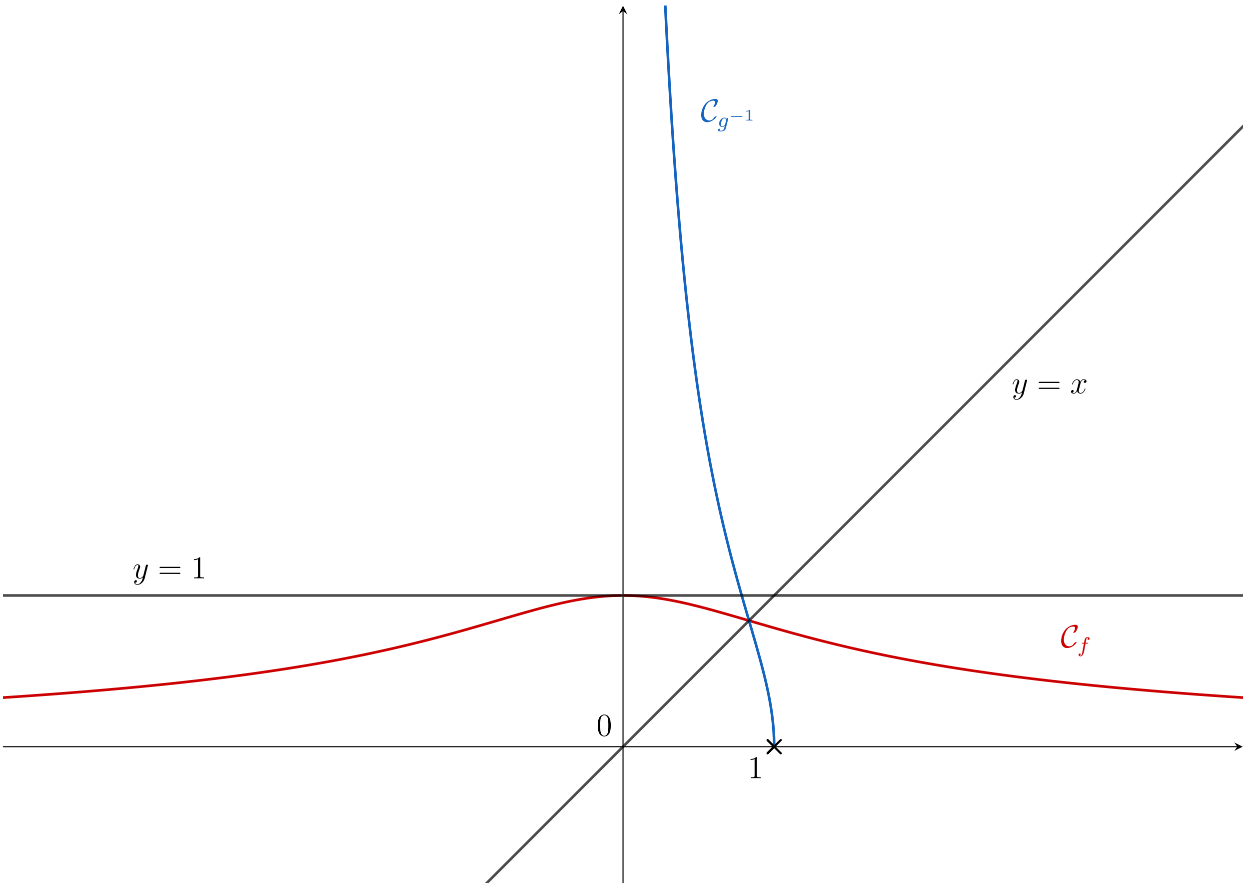
où les limites se calculent directement par quotient (pas de forme indéterminée) en notant que Arctan tend vers $\pm\pi/2$ en $\pm\infty$.

4. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Sa dérivée est négative sur $\mathbb{R}_+$, ne s'annulant qu'en 0 (donc un nombre fini de fois).
On a $f(0) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Par théorème de la bijection monotone : f réalise une bijection (strictement décroissante) de $\mathbb{R}_+$ dans $]0;1]$.

(b) La continuité de f (donc de g) assure, par théorème de la bijection monotone, la continuité de g^{-1}.

(c) La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction g l'est également. De plus, la fonction f' ne s'annule qu'en 0 : ainsi g^{-1} est dérivable partout sauf en $g(0) = 1$, donc sur $]0;1[$, et n'est pas dérivable en 1 (avec une tangente verticale).
Mais, par quotient de fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f (donc g) est même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme g' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on a même que g^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;1[$.

5. On a les graphes suivants :



II.2 Seconde étude de f, et application à une suite récurrente

6. (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a :
$$0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
et en ajoutant $2ab$ à chaque membre on a la première inégalité.
On l'applique à $a = 1$ et $b = t \in \mathbb{R}$, ce qui donne :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ (1+t^2) \geqslant 2t$$
mais, pour $t \in \mathbb{R}$, on a : $1 + t^2 \geqslant 1 > 0$. Et par produit par $(1+t^2) > 0$, il vient :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ (1+t^2)^2 \geqslant (1+t^2) \geqslant 2t$$
ce qui donne l'inégalité demandée.

(b) Soit $x \in]0; +\infty[$:

i. Avec l'inégalité précédente, on déduit :
$$\forall t \in [0; x],\ \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}$$
et en intégrant cette inégalité sur $[0; x]$, il vient :
$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t}{2} \mathrm{d}t = \frac{x^2}{4}$$
qui est l'inégalité demandée.

ii. On reprend l'expression de f' de la question 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \geqslant -\frac{2}{x^2}\frac{x^2}{4} = -\frac{1}{2}$$

et comme on a le signe de f' sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$0 \geqslant f'(x) \geqslant -\frac{1}{2}$$

ce qui donne bien $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ en passant à la valeur absolue.

(c) Le cas $x > 0$ vient d'être traité.

Le cas $x = 0$ est immédiat, comme : $|f'(0)| = 0 \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour le cas $x < 0$, on utilise que f' est impaire :

$$|f'(x)| = |-f'(-x)| = |f'(\underbrace{-x}_{\in \mathbb{R}_+^*})| \leqslant \frac{1}{2}$$

ce qui prouve le résultat demandé.

7. (a) Du fait des variations de f, on déduit que f est bornée (étant à valeurs dans $]0;1]$).

On déduit que (u_n) est bornée : elle est bornée à partir du rang 1 entre 0 et 1, et donc bornée entre $\min(0, u_0)$ et $\max(1, u_0)$.

En tant que suite bornée, la suite (u_n) ne peut tendre vers $\pm\infty$: sa limite, si elle existe, est nécessairement finie.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = f(u_n)$, et que f est continue sur $\mathbb{R}$ (et donc a fortiori en la limite finie de (u_n), sous réserve d'existence), si (u_n) tend vers une limite, celle-ci est finie et est un point fixe de f.

(b) Considérons $\varphi = f - \mathrm{id} : x \mapsto f(x) - x$.

Par combinaison linéaire, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $\varphi' : x \mapsto f'(x) - 1$.

Mais on a également $|f'| \leqslant \frac{1}{2}$. Et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

puis :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{3}{2} \leqslant \varphi'(x) \leqslant -\frac{1}{2} < 0$$

donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule donc au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Mais on a également :

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{6} > 0 \text{ et } \varphi(1) = f(1) - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$$

(en utilisant que $2 < \pi < 4$). Comme φ est continue sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};1\right[$ et strictement décroissante sur cet intervalle, et que $0 \in \left]\varphi(1);\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right[$, on déduit par théorème de la bijection monotone que 0 possède un unique antécédent par φ dans $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};1\right[$.

Et finalement, l'unique point d'annulation $\ell \in \left]\frac{1}{\sqrt{3}};1\right[$ de φ sur $\mathbb{R}$ est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$.

8. Comme $|f'| \leqslant 1/2$, par inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \; |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \ell|$$

c'est-à-dire que $K = 1/2$ et $b = |a - \ell|$ conviennent :
   - initialisation : pour $n = 0$, on a directement :

$$|u_0 - \ell| \leqslant K^0 b$$

   (c'est même une égalité) ;
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant K^n b$. Par inégalité des accroissements finis, on a :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant K|u_n - \ell|$$

   et par hypothèse de récurrence, on a donc :

$$|u_{n+1} - \ell| \overset{HR}{\leqslant} KK^n b = K^{n+1} b$$

   ce qui prouve l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.

9. Comme $K \in [0; 1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n = 0$.
   Et par encadrement, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
   Et ainsi, peu importe la valeur de u_0, la suite (u_n) converge vers ℓ, l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$.

II.3 Une fonction définie par une intégrale

10. La fonction f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, par théorème fondamental de l'analyse, elle possède une unique primitive qui s'annule en 0.

11. On a directement l'expression intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{F(2x) - F(x)}{x}.$$

12. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur de s'annule pas. Par primitive, la fonction F est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Par composée et combinaison linéaire, la fonction $x \mapsto F(2x) - F(x)$ est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Et par quotient par la fonction $x \mapsto x$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$, on déduit que φ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Par dérivée de composée, combinaison linéaire, et quotient, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; \varphi'(x) = \frac{(2F'(2x) - F'(x))x - (F(2x) - F(x))}{x^2}$$

$$= \frac{2f(2x) - f(x)}{x} - \frac{F(2x) - F(x)}{x^2} = \frac{2f(2x) - f(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x}$$

   ce qui donne bien l'égalité demandée pour $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ dans l'énoncé.

13. (a) La fonction F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. Or, on a le développement limité suivant pour f :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)$$

et par primitive d'un développement limité :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{F(0)}_{=0} + x - \frac{x^3}{9} + \mathrm{o}(x^3).$$

Remarque : on justifie le dl3 de F en 0 par primitive. On aurait aussi pu justifier son existence par caractère $\mathcal{C}^\infty$ de F en 0, avec formule de Taylor–Young.

Par composition, on déduit également :

$$F(2x) \underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{8}{9}x^3 + \mathrm{o}(x^3$$

et finalement :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{7}{9}x^3 + \mathrm{o}(x^3)}{x} = 1 - \frac{7}{9}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$$

et la même formule est valable en 0 car $\varphi(0) = 1$.

(b) Par troncature, la fonction φ admet donc le dl0 suivant en 0 : $\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \mathrm{o}(1)$. Donc est continue en 0.

(c) Le même raisonnement qu'à la question 2)b) assure que que : φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = 0$, sa tangente en 0 est d'équation $y = 1$, et la courbe de φ est sous sa tangente au voisinage de 0.

14. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$x^2\varphi'(x) + x\varphi(x) = 2xf(2x) - xf(x) = \mathrm{Arctan}(2x) - \mathrm{Arctan}(x)$$

donc φ est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

15. Comme φ est solution de (E), on possède déjà une solution particulière (sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$). Reste à résoudre l'équation homogène :

$$(E_0) : x^2y' + xy = 0.$$

dont les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ forment respectivement les ensembles :

$$S_+^0 = \left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{x} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } S_-^0 = \left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mu}{x} \end{array} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Et ainsi par théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ forment respectivement les ensembles :

$$S_+ = \left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x) + \dfrac{\lambda}{x} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } S_- = \left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x) + \dfrac{\mu}{x} \end{array} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

16. On cherche à recoller les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ pour former des solutions sur $\mathbb{R}$. Mais pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda}{x} = \left\{ \begin{array}{rcl} +\infty & \text{si} & \lambda > 0 \\ 0 & \text{si} & \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si} & \lambda < 0 \end{array} \right. \text{ et } \lim_{x\to 0^-} \frac{\mu}{x} = \left\{ \begin{array}{rcl} -\infty & \text{si} & \mu > 0 \\ 0 & \text{si} & \mu = 0 \\ +\infty & \text{si} & \mu < 0 \end{array} \right.$$

et donc le seul recollement continu possible est φ.

Comme on a vu que φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, cela conclut que c'est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

II.4 Une suite implicite

On souhaite étudier dans cette partie une estimation de la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ v_n > 0 \text{ et } f(v_n) = e^{-n}$$

17. La fonction f réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$: pour $n \geqslant 1$, comme $e^{-n} \in]0;1[$, alors e^{-n} possède bien un unique antécédent $v_n > 0$ par f.
    Ceci assure que (v_n) est bien définie.
18. On a directement l'expression de v_n explicite :

    $$\forall n \geqslant 1,\ v_n = g^{-1}(e^{-n})$$

    où $x \mapsto e^{-x}$ et g^{-1} sont strictement décroissantes, et donc par composée (v_n) est strictement croissante.
    De plus, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g^{-1}(x) = +\infty$. Par composée, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
19. Comme (v_n) tend vers $+\infty$, on a donc par composée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Arctan}(v_n) = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\mathrm{Arctan}(v_n) \sim \dfrac{\pi}{2}$.
    En remplaçant dans l'égalité $f(v_n) = e^{-n}$, il vient :

    $$v_n = e^n \mathrm{Arctan}(v_n) \sim \frac{\pi}{2} e^n.$$

20. Pour $x > 0$, on a :

    $$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

    et ainsi pour tout $n \geqslant 1$:

    $$\mathrm{Arctan}(v_n) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{v_n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

    puis :

    $$v_n - \frac{\pi}{2} e^n = e^n \left(\mathrm{Arctan}(v_n) - \frac{\pi}{2}\right) = -e^n \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{v_n}\right)$$

    mais comme v_n tend vers $+\infty$, alors $1/v_n$ tend vers 0. Et par équivalent de Arctan au voisinage de 0 il vient :

    $$v_n - \frac{\pi}{2} e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}$$

    donc la suite $\left(v_n - \dfrac{\pi}{2} e^n\right)$ converge vers $-\dfrac{2}{\pi}$.
21. On a ainsi :

    $$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} e^n - \frac{2}{\pi} + \mathrm{o}(1)$$

    qu'on peut réinjecter dans l'écriture de v_n, ce qui donne :

    $$v_n = e^n \mathrm{Arctan}(v_n) = e^n \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{v_n}\right)\right)$$

    et en notant que :

    $$\frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\frac{\pi}{2} e^n - \frac{2}{\pi} + \mathrm{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{\pi} e^{-n} \frac{1}{1 - \frac{4}{\pi^2} e^{-n} + \mathrm{o}(e^{-n})}$$

    $$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{\pi} e^{-n} \left(1 + \frac{4}{\pi^2} e^{-n} + \mathrm{o}(e^{-n})\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{\pi} e^{-n} + \frac{8}{\pi^3} e^{-2n} + \mathrm{o}(e^{-2n})$$

on déduit par de dl2 de Arctan en 0 :

$$
\begin{aligned}
v_n &\underset{n\to+\infty}{=} e^n\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\pi}e^{-n} + \frac{8}{\pi^3}e^{-2n} + \mathrm{o}(e^{-2n})\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^n\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{2}{\pi}e^{-n} + \frac{8}{\pi^3}e^{-2n} + \mathrm{o}(e^{-2n}) + \mathrm{o}(e^{-2n})\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}e^n - \frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}e^{-n} + \mathrm{o}(e^{-n})
\end{aligned}
$$