Lycée Champollion, PCSI-1-2-3, 2024–2025.
Proposition de corrigé

Exercice 1

(1) Il s'agit de l'application linéaire canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$: c'est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$...

(2) ... et la question précédente nous donne explicitement la matrice M.

(3) On peut raisonner par exemple (et c'est, comme d'habitude, le mieux) par pivot de Gauss, en se ramenant à I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes de M. Les mêmes opérations effectuées en parallèle sur I_3 donnent

$$M^{-1} = \frac{1}{72}\begin{pmatrix} 15 & -2 & 3 \\ 0 & 12 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

(4) La question précédente, par lien matrice/application linéaire, donne le fait que f est bijective et de réciproque l'application canoniquement associée à M^{-1}.

(5) On a $M - 4I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que les colonnes 1 et 3 sont opposées et les deux premières sont linéairement indépendantes. Donc le rang de M_1 vaut 2 ; par théorème du rang, E_1 est de dimension 1 et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, non nul, appartient à ce noyau, donc forme une base de ce noyau.

(6) On fait de même : $M - 6I_3$ est de rang 2, donc E_2 est de dimension 1 et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

(7) On échelonne la matrice par opérations élémentaires sur les lignes : les opérations élémentaires successives $L_1 \leftrightarrow L_3, L_3 \leftarrow L_3 + (5-\lambda)L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ transforment successivement la matrice $M - \lambda I_3$ en

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 5-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 6-\lambda & -1+(5-\lambda)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 10\lambda + 24 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont non nuls : en effet, les racines du polynôme du second degré qui apparaît comme dernier coefficient diagonal sont 6 et 4. Elle est donc inversible et le rang cherché vaut 3.

(8) On a déjà vu que pour $\lambda \in \{4, 6\}, \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui montre que $\{4, 6\} \subset \mathrm{Sp}(f)$. Par ailleurs, le calcul de la question précédente montre que pour $\lambda \notin \{4, 6\}$, la matrice $M - \lambda I_3$ est inversible, donc son noyau est nul, et il en va donc de même du noyau de $f - \lambda\mathrm{Id}$. Par double inclusion, on a bien montré le résultat souhaité.

(9) Ces deux espaces sont en somme directe : en effet, un élément X de $E_1 \cap E_2$ peut se mettre sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$, mais aussi sous la forme $\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ -\mu \end{pmatrix}$, donc $\lambda = \mu = 0$ et $X = 0_{\mathbb{R}^3}$.

En revanche, la somme de leurs dimensions vaut 2 et la dimension de $\mathbb{R}^3$ vaut 3, ce qui rend impossible une éventuelle supplémentarité.

(10) Vérifions la liberté de $\mathcal{D}$: si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

Ce système donne directement $\lambda_3 = 0$ et presque directement $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi, $\mathcal{D}$ est libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$; c'est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Calculons : $f(g_1) = Ag_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4g_1$. De même, $f(g_2) = 6g_2$ et $f(g_3) = g_2 + 6g_3$. On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{D}$ est

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(11) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{D}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut calculer $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Les relations de changement de base donnent

$$M = PTP^{-1}$$

(12) (a) Un simple calcul donne $N^2 = 0$. N est bien nilpotente. Comme $N \neq 0$ et $N^2 = 0$, l'indice de nilpotence vaut 2.

(b) Les matrices D et N commutent (simple calcul : on trouve $DN = ND = 6E_{2,3}$), et on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

Mais comme $N^2 = 0$, on a $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$, si bien que

$$T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1}$$

Tous calculs faits, on trouve

$$T^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & n6^{n-1} \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

(c) Vu la relation $M = PTP^{-1}$, une récurrence directe (qu'il faut écrire quand on est aussi tôt dans le sujet bien entendu) donne $M^n = PT^nP^{-1}$. On connaît toutes les matrices intervenant dans ce produit ; l'application numérique donne

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(2^n + 3^n) & n6^{n-1} & 2^{n-1}(2^n - 3^n) \\ 0 & 6^n & 0 \\ 2^{n-1}(2^n - 3^n) & -n6^{n-1} & 2^{n-1}(2^n + 3^n) \end{pmatrix}$$

(13) (a) D'après la forme de la matrice, on a $f(f_1) = af_1$ et de même $f(f_2) = bf_2$ et $f(f_3) = cf_3$. Par ailleurs, f_1, f_2, f_3, étant des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$, sont tous non nuls. Ces égalités signifient donc que les noyaux de $f - a\mathrm{Id}$, $f - b\mathrm{Id}$ et $f - c\mathrm{Id}$ ne sont pas réduits à $\{0\}$, soit exactement que a, b et c appartiennent à $\mathrm{Sp}(f)$. D'où le résultat.

(b) Supposons donc $a = b = 4$. Alors la famille (f_1, f_2) est d'une part libre puisque sous-famille de la base $\mathcal{C}$. Mais c'est aussi une famille de vecteurs de E_1 qui est de dimension 1. Elle est donc liée. C'est une contradiction !

(c) Puisque $\mathrm{Sp}(f)$ ne contient que deux éléments, on aura toujours au moins deux des nombres a, b, c qui seront égaux. En considérant les vecteurs relatifs à deux tels nombres, on trouve toujours une contradiction puisque E_1 et E_2 sont chacun de dimension 1. Ceci permet donc de conclure que la matrice de f n'est diagonale dans aucune base.

Exercice 2 (Ecricome économique 2023)

(1) Lors du premier tirage, le numéro obtenu est un entier aléatoire dans $[|1, n|]$ avec équiprobabilité puisque chaque numéro figure sur une seule boule. La variable aléatoire suit donc la loi uniforme sur $[|1, n|]$: $\forall k \in [|1, n|], \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$. L'espérance est donc $E(X) = \frac{n+1}{2}$ (la preuve était demandée : cf votre cours !). Pour la variance, il faut faire un calcul : d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

et d'après la formule de transfert :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Avec la formule connue de la somme des carrés, on trouve

$$E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

et en mettant tout au même dénominateur, on trouve finalement

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

(2) Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, le nombre total de boules présente dans la seconde urne est

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

et pour $j \in [|1, k|]$, on a exactement j boules portant le numéro j dans l'urne, si bien que

$$\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = j) = \frac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2j}{k(k+1)}$$

En revanche, si $j > k$, on a $j \geq k + 1$ et puisque $(X = k)$ est réalisé, aucune boule portant le numéro j n'est présente dans la deuxième urne, donc

$$\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = j) = 0$$

(3) (a) On trouve directement (la fraction rationnelle possède deux pôles simples, 0 et 1, on peut donc utiliser une formule du cours)

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

(b) On a déjà $Y(\Omega) = [|1, n|]$. Pour $j \in [|1, n|]$, on applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y = j) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = j) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} \\
&= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

On a successivement dans ces calculs utilisé la loi de X ainsi que les probabilités conditionnelles calculées en question 1 et 2, puis la décomposition en éléments simples exhibée à la question 3.a, et enfin reconnu un télescopage.

(4) Il s'agit de calculer $\mathbf{E}(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbf{P}(Y = j)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j(n+1-j) \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \left((n+1)\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2\right) \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \left((n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{2}{n(n+1)} n(n+1) \left(\frac{n+1}{2} - \frac{2n+1}{6}\right) \\
&= \frac{n+2}{3}
\end{aligned}$$

(5) (a) On calcule en utilisant la formule de transfert pour des couples de variables aléatoires :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kj\mathbf{P}((X=k)\cap(Y=j)) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} kj\frac{1}{n}\frac{2j}{k(k+1)} \\
&= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k} j^2 \\
&= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(2k+1)}{3} \\
&= \frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}
\end{aligned}$$

après simplification des sommes classiques des carrés et des entiers.

(b) Par formule sur la covariance, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^2-1}{18}$$

(6) Intuitivement, elles ne le sont pas : la valeur prise par X détermine la valeur maximale possible pour Y. Et d'ailleurs, on vient de calculer la covariance de X et Y qui est non nulle : par contraposée, elles ne peuvent être indépendantes.
On pouvait aussi exhiber un contre-exemple explicite : on a par exemple $\mathbf{P}((X=1)\cap(Y=2)) = 0$ (si $X=1$, la deuxième urne ne contient pas de boule numérotée 2), mais pourtant aucune des deux probabilités $\mathbf{P}(X=1)$ et $\mathbf{P}(Y=2)$ n'est nulle (puisque $n \geq 2$), donc leur produit non plus.

Problème 1 (adapté de Centrale PSI 1 2023)

(1) C'est une conséquence directe de la bilinéarité du produit matriciel : la multiplication par A à gauche est une application linéaire. Et cette application est bien à valeur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'où le résultat.

(2) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \iff (2x+4y=0, 4x+8y=0) \iff x=-2y \iff X = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, une base du noyau de A est constituée de l'unique vecteur (non nul) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On constate que $\Gamma_A(M) = \begin{pmatrix} 2a+4c & 4a+8c \\ 2b+4d & 4b+8d \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$M \in \mathrm{Ker}(\Gamma_A) \iff (a=-2c, b=-2d) \iff M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est direct que les deux matrices qu'on vient d'exhiber forment une famille génératrice du noyau de Γ_A, et elles sont manifestement non colinéaires donc forment une famille libre. C'est bien une base du noyau de Γ_A.

Il suffit alors de prendre une matrice non nulle (donc de rang non nul) du noyau de Γ_A pour constater que son image par Γ_A est de rang 0 : ainsi, Γ_A ne conserve pas le rang.

(3) (a) Soit $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$. Par le cours, on sait que le rang d'une application linéaire est invariant par composition par un isomorphisme. Pour obtenir le résultat demandé, il suffit de passer aux applications linéaires canoniquement associées. Notons f l'application linéaire canoniquement associée à A et u celle associée à M. On sait alors que f est un isomorphisme ce qui donne

$$\mathrm{rg}\,(f \circ u) = \mathrm{rg}(u)$$

donc

$$\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M)$$

(b) Supposons que Γ_A conserve le rang. Notons qu'alors $\Gamma(I_n) = A$. Comme la matrice identité est de rang n et que Γ_A conserve le rang, A aussi est de rang n, et est donc inversible. Ainsi, la réciproque est vraie.

(4) (a) On constate que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un produit de matrices inversibles étant inversible, on a

$$\Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi_{P_2,Q_2}(M) = P_1P_2MQ_2Q_1 = \Phi_{P_1P_2,Q_2Q_1}(M)$$

D'où l'égalité d'applications

$$\Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi_{P_2,Q_2} = \Phi_{P_1P_2,Q_2Q_1}$$

ce qui montre que la composée est bien dans $\mathcal{L}_1$.
De même, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a (on utilise aussi cette fois le fait qu'une transposée de matrice inversible l'est)

$$\Phi_{P_1,Q_1} \circ \Psi_{P_2,Q_2}(M) = P_1(P_2MQ_2)^TQ_1 = P_1Q_2^TM^TP_2^TQ_1 = \Phi_{P_1Q_2^T,P_2^TQ_1}(M)$$

d'où

$$\Phi_{P_1,Q_1} \circ \Psi_{P_2,Q_2} = \Phi_{P_1Q_2^T,P_2^TQ_1}$$

et l'appartenance à $\mathcal{L}_2$.

(b) On vient de traiter deux des quatre cas possibles : si Θ et Θ' sont dans $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, soit les deux sont dans $\mathcal{L}_1$, soit les deux sont dans $\mathcal{L}_2$, soit l'un est dans $\mathcal{L}_1$ et l'autre dans $\mathcal{L}_2$ (l'ordre compte). Les preuves des deux autres cas sont tout à fait similaires à celles qu'on vient de mener.

(5) (a) On constate que

$$\Phi_{P,Q} \circ \Phi_{P^{-1},Q^{-1}} = (M \mapsto P(P^{-1}MQ^{-1})Q) = (M \mapsto M) = \mathrm{Id}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

ce qui prouve (pour un endomorphisme en dimension finie, l'inversibilité d'un seul côté suffit à être inversible) que

$$\Phi_{P,Q} \text{ est un automorphisme et sa réciproque est } \Phi_{P^{-1},Q^{-1}}$$

De même

$$\Psi_{P,Q} \circ \Psi_{P^{-1},Q^{-1}} = (M \mapsto P(P^{-1}M^\top Q^{-1})Q) = (M \mapsto M^\top) = \mathcal{T}$$

or $\mathcal{T}$ est un automorphisme de réciproque lui-même donc

$$P, Q \text{ est un automorphisme et sa réciproque est } \mathcal{T} \circ \Psi_{P^{-1},Q^{-1}}$$

(b) La composition à gauche mais aussi à droite, par un isomorphisme, préserve le rang. Il suffit donc de reprendre la démonstration en question 3.a et de composer en plus à droite par l'isomorphisme canoniquement associé à Q, et éventuellement par la transposition, qui est aussi un isomorphisme.

(6) Par construction, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n$.

(7) (a) $\mathcal{B}_2$ étant une base du noyau de f, c'est notamment une famille libre de E. Le théorème de la base incomplète assure alors l'existence de tels vecteurs $e_1, \cdots, e_k$ pour un certain k (qui vaut d'ailleurs $n - \dim(\ker f) = \mathrm{rg}(f)\,!$).

(b) Notons que sous l'hypothèse de l'énoncé, $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ est (par construction) un supplémentaire de $\ker(f)$. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i) = 0$$

Notons qu'alors par linéarité de f on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right) = 0$$

ce qui prouve que le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ est dans le noyau de f. Mais par ailleurs, il est dans $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ qui est un supplémentaire dudit noyau. Ce vecteur est donc nul, et par liberté de la famille $(e_1, \cdots, e_k)$, les scalaires λ_i sont tous nuls. C'est exactement ce qu'on voulait démontrer.

(c) Notons qu'on a déjà $k \leqslant n$, car k est la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $k = n$. Alors $\mathcal{B}_2 = \varnothing$, donc le noyau de f est nul. C'est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. Donc $k < n$.

(d) Par construction, il s'agit de la matrice $J_{n,r}$ définie juste après (c'est intéressant de lire tout l'énoncé...).

(8) Soit f l'application canoniquement associée à M de rang $r \in [|0, n|]$ (on notera $\mathcal{B}_{can}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Distinguons trois cas :

— Si f est nulle, M est nulle et n'importe quel couple (P, Q) de matrices inversibles convient.

— Si f est un isomorphisme, ce qui signifie que (f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie) $\ker(f) = \{0\}$ et $r = n$, la partie II-A montre qu'il existe deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n = J_{n,n}$; d'après la formule de changement de base pour les matrices d'une application linéaire, il existe deux matrices P_2, Q_2 inversibles telles que $J_{n,n} = P_2 M Q_2$, donc $M = \Phi_{P_2^{-1}, Q_2^{-1}}(J_{n,n})$.

— Enfin, si on n'est dans aucun des deux cas précédents, $r \in [|1, n-1|]$ et on est dans la situation de la partie III-B. Le résultat de Q23 donne alors deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = J_{n,r}$; on conclut pareillement.

(9) (a) Vu leur rang, $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(B)$ sont des droites. Comme elles sont distinctes, leur intersection est nulle, et par caractérisation par la dimension et l'intersection, ce sont des supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Prenons une base

$$B_1 = (U_1, U_2)$$

de $\mathbb{R}^2$ avec U_2 un vecteur qui dirige KerA. Ceci existe car KerA est une droite vectorielle, et donc dans $\mathbb{R}^2$ tout supplémentaire en est une droite vectorielle aussi. Prenons

$$B_2 = (AU_1, V_2)$$

avec V_2 qui dirige $\mathrm{Im}B$. On a B_2 qui est une base de $\mathbb{R}^2$ car $AU_1 \in \mathrm{Im}A$ et $AU_1 \neq 0$ car $U_1 \notin$ KerA (puisque (B_1) est une base de $\mathbb{R}^2$) et $V_2 \in \mathrm{Im}B$, or $\mathrm{Im}A$ et $\mathrm{Im}B$ sont supplémentaires comme vu en question précédente.

En posant $Q_2 = \mathrm{M}_{B_{can}, B_1}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $P_2 = \mathrm{M}_{B_2, B_{can}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ (matrices de passage) on a le résultat désiré.

(10) Calcul plus ou moins pénible à l'appui, on trouve le résultat voulu avec $U = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = Q^T$.

(11) Comme Ψ préserve le rang, on a notamment que l'image d'une matrice non nulle (donc de rang non nul) est non nulle ; ainsi, le noyau de Ψ est l'espace nul, ce qui (Ψ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie) entraîne que Ψ est bijectif, donc un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(12) B_1 et B_4 sont de rang 1, leurs images par Ψ le sont donc aussi ; $B_1 + B_4 = I_2$ est de rang 2, son image est donc également inversible. Les images de B_1 et de B_4 sont distinctes, donc la question 9 permet de conclure.

(13) (a) Ψ' préserve le rang donc pour tout $i \in [|1, 4|]$, $\mathrm{rg} B'_i = \mathrm{rg} B_i = 1$ et en particulier B'_i est non-inversible, or par définition de C_i on a $B'_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ et la nullité de son déterminant donne la relation désirée.

(b) $B'_1 + B'_2$ est de rang 1 (comme $B_1 + B_2$) donc son déterminant est nul à savoir

$$\begin{vmatrix} 1 + a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$0 = (1 + a_2)d_2 - b_2c_2 = d_2$$

par la question précédente. De même pour $d_3 = 0$ avec $B'_1 + B'_3$ non inversible.

(c) $B'_3 + B'_4$ est de rang 1 donc non inversible donc son déterminant est nul, ceci donne, en utilisant que $b_3c_3 = 0$, que

$$a_3d_4 = b_3c_4$$

De même le déterminant de $B'_2 + B'_4$ est nul ce qui donne

$$a_2d_4 - b_2c_4 = 0$$

(14) On a donc à ce stade :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

où l'on sait d'une part que soit b_2 soit c_2 est nul, et de même pour b_3 et c_3. Enfin, on a les relations $a_2d_4 = b_2c_4$ et $a_3d_4 = b_3c_4$.

M' est inversible (c'est la matrice dans la base canonique de Ψ', qui est un isomorphisme), donc nécessairement $d_4 \neq 0$ (sinon on aurait une ligne de 0 dans M'). Si $b_2c_3 - c_2b_3$ était nul, la matrice $\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ serait non inversible, et on pourrait par des opérations élémentaires sur ses lignes la transformer en une matrice ayant une ligne de 0, et quitte à les échanger on peut supposer que cette ligne est la deuxième ; mais alors les mêmes opérations élémentaires effectuées sur les lignes de M' donnerait que sa deuxième ligne est nulle, ce qui est impossible car cette matrice est inversible.

Notons qu'un argument de calcul de déterminant (par développement par rapport à la première colonne puis la dernière ligne, le déterminant de M' vaut $d_4(b_2c_3 - c_2b_3)$) est bien plus efficace ici.

(15) (a) On a $b_2c_3 - c_2b_3 \neq 0$, donc avec $c_2 = 0$, $b_2 \neq 0$ et $c_3 \neq 0$.

$B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4$ a aussi un déterminant nul (rang 1) ce qui donne

$$0 = (1 + a_2 + a_3)d_4 - (b_2 + b_3)(c_3 + c_4) = d_4 - (b_2 + b_3)c_3$$

Il reste à prouver que $b_3 = 0$ car on aura alors $d_4 = b_2c_3$ (deuxième relation demandée) puis par la première relation on aura $a_3 = 0$ (car $d_4 \neq 0$) donc la forme de matrice annoncée, et enfin on aura $c_4 = a_2\dfrac{d_4}{b_2} = a_2c_3$ ($b_2 \neq 0$ et $b_2c_3 = d_4$).

On tire $b_3 = 0$ du fait que $B'_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & 0 \end{pmatrix}$ a même rang que B_3, à savoir 1, donc non inversible, donc son déterminant, à avoir $-b_3c_3 = 0$, or on a montré $c_3 \neq 0$.
On a bien mis M' sous la forme voulue avec les relations souhaitées.

(b) On reconnait dans M' une matrice de la forme par blocs

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix}$$

avec $a = 1, b = c = 0, d = c_3$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ ce qui par la question 10 donne que Ψ' est dans $\mathcal{L}_1$ et donc $\Psi = \Phi_{P_1^{-1},Q_1^{-1}} \circ \Phi'$ aussi par stabilité par composition de $\mathcal{L}_1$.

(16) (a) Comme $c_2 \neq 0$ et $b_2c_2 = 0$ on a $b_2 = 0$ donc

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche par T, on a le résultat voulu.

(b) Cette matrice est inversible en tant que matrice d'automorphisme, donc de même qu'avant :

$$b_3c_2d_4 \neq 0$$

donc $b_3 \neq 0$, or $b_3c_3 = 0$ donc $c_3 = 0$.
On va maintenant exploiter les trois déterminants nuls comme précédemment. Cependant nous n'avons plus $c_2 = 0$, en revanche nous avons $c_3 = 0$. Ainsi

— $\det(B'_1 + B'_4) = 0 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 + c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ fournit (en utilisant que $b_3c_3 = 0$)

$$0 = a_3d_4 - b_3c_4$$

— $\det(B'_2 + B'_4) = 0 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 + c_4 \\ 0 & d_4 \end{vmatrix}$ fournit (comme $d_4 \neq 0$)

$$a_2 = 0$$

(c) Finalement la matrice de $\Psi'' = \Psi' \circ \mathcal{T}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

avec $d_4 = c_2b_3$ et $c_4 = c_2a_3$ car $c_2 = \dfrac{d_4}{b_3}$ donc on retrouve la forme par blocs précédemment exhibée, ce qui prouve que Ψ'' est dans $\mathcal{L}_1$ et donc par composition par $\mathcal{T}$, $\Psi' \in \mathcal{L}_2$ et par composition par $\Phi_{P_1^{-1},Q_1^{-1}}$, $\Psi \in \mathcal{L}_2$ (cf preuve de 13).