Lycée Champollion, PCSI-1-2-3, 2024-2025.
Samedi 24 Mai 2025
Durée : 4 heures.

Instructions générales :

Aucun document n'est autorisé.

L'emploi d'une calculatrice est interdit.

Dans chaque question, les résultats demandés seront **encadrés**, les étapes des méthodes mises en oeuvre et les résultats intermédiaires seront mis en évidence par un **surlignement**, une ligne sautée ou tout autre moyen de votre choix.

Vous êtes enfin invités à porter une attention particulière à la rédaction et à l'orthographe : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Ce DS sera IMPERATIVEMENT rendu sur 3 copies séparées :

- Exercice 1 sur la COPIE 1,
- Exercice 2 et partie III du problème sur la COPIE 2,
- Parties I et II du problème sur la COPIE 3.

Barème indicatif sur 105 points (donnant une idée du temps respectif qu'il est bon de consacrer à chaque exercice).

Exercice 1 : 35 points ;

Exercice 2 : 19,5 points ;

Problème : partie I : 16,5 points ; partie II : 15 points ; partie III : 19 points.

Exercice 1

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + y - z \\ 6y \\ -x - y + 5z \end{pmatrix}$$

On notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

- (1) Justifier rapidement que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Préciser la matrice M de l'application f dans la base $\mathcal{B}$.
- (3) Montrer que M est inversible et calculer son inverse. On explicitera les calculs et la méthode utilisée.
(Indication : il est normal de trouver que $72 \cdot M^{-1}$ est à coefficients entiers !)
- (4) En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Préciser f^{-1} .

Dans toute la suite de l'exercice, on note $\text{Sp}(f)$, et on appelle *spectre de f* , l'ensemble suivant :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R}, \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}\}$$

- (5) Déterminer, dans l'ordre qui vous convient le mieux, le rang de $M - 4I_3$, ainsi que la dimension et une base de $E_1 = \text{Ker}(f - 4\text{Id})$.
- (6) Déterminer de même le rang de $M - 6I_3$ ainsi que la dimension et une base de $E_2 = \text{Ker}(f - 6\text{Id})$.
- (7) Pour $\lambda \notin \{4, 6\}$, montrer que le rang de $M - \lambda I_3$ vaut 3.
- (8) Déduire des questions précédentes que $\text{Sp}(f) = \{4, 6\}$.
- (9) Montrer que E_1 et E_2 sont en somme directe, mais ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(10) On pose dans cette question

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{D} = (g_1, g_2, g_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice T représentant l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{D}$ est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 6 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des coefficients qu'on calculera explicitement.

(11) Écrire une formule reliant M et T en détaillant complètement toutes les matrices y intervenant.

(12) On pose $T = D + N$ avec $N = E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que N est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$. Quel est l'indice de nilpotence de N , c'est-à-dire le plus petit des entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que $N^k = 0$?

(b) En déduire une expression de T^n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire une expression de M^n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(13) L'objectif de cette question est de montrer qu'il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de f soit diagonale. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'on a trouvé

une base $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\{a, b, c\} \subset \text{Sp}(f)$.

(b) On suppose par exemple que $a = b = 4$. En considérant la famille (f_1, f_2) , trouver une contradiction.

(c) Justifier sommairement qu'on arrivera dans tous les cas à se ramener à un cas similaire au précédent.

Exercice 2

Soit $n \geq 2$.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n . On tire une boule au hasard dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de cette boule. Si cette boule porte le numéro k , on place dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [1, k]$, j boules numérotées j , jusqu'à k boules numérotées k . Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne, et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

Ainsi, si au premier tirage on tire la boule 3, la seconde urne contient une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2 et trois boules numérotées 3.

(1) Reconnaître la loi de X , puis calculer son espérance et sa variance (même si la formule de l'une ou de l'autre figure dans votre cours, il est ici attendu une démonstration de chacune de ces valeurs).

(2) Soient $k, j \in [1, n]$. Calculer $\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = j)$.

(3) (a) Déterminer la décomposition en éléments simples de :

$$f : t \mapsto \frac{1}{t(t+1)}$$

c'est-à-dire, trouver deux réels a, b tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad f(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$$

(b) Donner l'univers-image $Y(\Omega)$ et montrer que pour tout $j \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbf{P}(Y = j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

(4) Calculer l'espérance de Y .

(5) (a) Montrer que :

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}$$

(b) En déduire la covariance de X et Y .

(6) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Problème

Notations et rappels

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne à n lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et par 0_n la matrice nulle d'ordre n .

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$f_M : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto M \times X \end{cases}$$

f_M est donc l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M , et on appelle noyau et image de M le noyau et l'image de f_M : $\ker(M) = \ker(f_M)$ et $\text{Im}(M) = \text{Im}(f_M)$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et $\text{rg}(M) = \dim(\text{Im}(M))$ son rang. On rappelle que M et $M^\top$ ont le même rang.

On note $\mathcal{T}$ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice M associe $M^\top$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout entier $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la j -ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ en $M_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f .

On dit qu'un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conserve le rang lorsque :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg}(\Phi(M)) = \text{rg}(M)$$

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le rang.

PARTIE I : Étude de quelques endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

I.A – Multiplication à gauche par une matrice donnée

L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note Γ_A l'application

$$\Gamma_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto AM \end{cases}$$

On attire l'attention des candidats sur le fait que Γ_A n'est pas l'application canoniquement associée à la matrice A , qui est elle notée f_A !

- (1) Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Γ_A appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- (2) On fixe dans cette question $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Déterminer une base du noyau de A , et une base du noyau de Γ_A . En déduire que Γ_A ne conserve pas le rang.
- (3) (a) Démontrer que, si A appartient à $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors Γ_A conserve le rang. (*Indication : utiliser les endomorphismes canoniquement associés à chaque matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*)
 (b) La réciproque est-elle vraie ?

I.B – Multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles avec ou sans transposition préalable

Pour toutes matrices P et Q appartenant à $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$\begin{aligned} \Phi_{P,Q} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto PMQ \end{cases} \\ \Psi_{P,Q} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto PM^T Q \end{cases} \end{aligned}$$

On admet que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \Phi_{P,Q} \mid (P, Q) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2 \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_2 = \left\{ \Psi_{P,Q} \mid (P, Q) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2 \right\}.$$

- (4) (a) Pour tout $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi_{P_2, Q_2} \in \mathcal{L}_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Psi_{P_2, Q_2} \in \mathcal{L}_2$$
 (b) Démontrer que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall (\Theta, \Theta') \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2, \quad \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$
- (5) Soient P et Q deux matrices de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs applications réciproques.
 - (b) Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

PARTIE II : Endomorphismes de rang donné

On suppose que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Son noyau est noté $\ker(f)$.

II.A – On suppose dans cette sous-partie que f est un isomorphisme. On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}'$ la base

$$\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

- (6) Déterminer $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

II.B – On suppose dans cette sous-partie que f n'est pas l'endomorphisme nul et que $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(f)$.

(7) (a) Justifier que l'on peut trouver un entier $k \geq 1$ et des vecteurs $e_1, \dots, e_k$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, \mathcal{B}_2)$ (c'est-à-dire, la concaténation de la famille $(e_1, \dots, e_k)$ et de la base $\mathcal{B}_2$) soit une base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_k))$ est libre.

(c) Justifier que $k < n$.

On complète la famille $(f(e_1), \dots, f(e_k))$ en une base $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_k), f_{k+1}, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

(d) Déterminer $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

II.C – Dans toute la suite du problème, pour tout entier naturel $r \in [0, n]$, on note

$$J_{n,r} = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ fois}})$$

en convenant que $J_{n,n} = I_n$ et $J_{0,n} = 0_n$.

(8) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r . Dédurre des questions précédentes qu'il existe deux matrices P et Q de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \Phi_{P,Q}(J_{n,r}).$$

(Indication : on pourra discuter suivant la valeur de r .)

II.D – On suppose dans cette sous-partie que $n = 2$ et que A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1.

On suppose que $\text{Im}(A)$ et $\text{Im}(B)$ sont distinctes.

(9) (a) Montrer que $\text{Im}(A)$ et $\text{Im}(B)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

(b) En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe deux matrices P_2 et Q_2 de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \quad \text{et} \quad B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$$

où α et β sont des réels, non tous deux nuls.

PARTIE III : Endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 2$.

On désigne par $\mathcal{B}_{\text{ca}} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III.A –

(10) Dans cette question, on se donne deux matrices inversibles P et Q , de la forme

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\text{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi_{P,Q}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay & bx & by \\ az & at & bz & bt \\ cx & cy & dx & dy \\ cz & ct & dz & dt \end{pmatrix}$$

où $U = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.

On suppose dans la suite du problème que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang.

III.B –

(11) Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(12) Déterminer les rangs de $\Psi(B_1)$, $\Psi(B_4)$, $\Psi(B_1 + B_4)$. En déduire l'existence de deux matrices P_1 et Q_1 de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$, telles que :

$$[\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Psi](B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Psi](B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont des réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

On adopte alors les notations suivantes : $\Psi' = \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Psi$, $M' = M_{\mathcal{B}_{\text{ca}}}(\Psi')$.

Pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on pose $B'_j = \Psi'(B_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$.

(13) (a) Démontrer que $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_i d_i - b_i c_i = 0$. On pourra étudier l'inversibilité de B'_i et la traduire en terme de déterminant 2×2 .

(b) En considérant le rang des matrices $B'_1 + B'_2$ et $B'_1 + B'_3$, démontrer que $d_2 = d_3 = 0$. En déduire que $b_2 c_2 = b_3 c_3 = 0$.

(c) En considérant les rangs des matrices $B'_3 + B'_4$, $B'_2 + B'_4$, démontrer de même que $a_2 d_4 = b_2 c_4$ et $a_3 d_4 = b_3 c_4$.

(14) À partir des informations connues à ce stade, donner l'expression de M' . En étudiant l'inversibilité de M' , démontrer que $d_4 \neq 0$ et $b_2 c_3 - c_2 b_3 \neq 0$.

(15) On suppose dans cette question que $c_2 = 0$.

(a) En utilisant les résultats de la question précédente et en considérant le rang de $B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4$, démontrer que

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

avec $c_4 = a_2 c_3$ et $d_4 = b_2 c_3$.

(b) En déduire que Ψ appartient à $\mathcal{L}_1$.

(16) On suppose dans cette question que $c_2 \neq 0$.

(a) Démontrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\text{ca}}$, de l'endomorphisme $\Psi'' = \Psi' \circ \mathcal{T}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

(b) Démontrer que $c_3 = 0$ et $a_2 = 0$.

(c) En déduire que Ψ'' appartient à $\mathcal{L}_1$ et que Ψ appartient à $\mathcal{L}_2$.

On a ainsi démontré, pour $n = 2$, qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conserve le rang si et seulement s'il appartient à $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Ce résultat reste valable y compris pour n plus grand que 2.