DS n^{o}9

I Exercices

Exercice 1 [Calculs de développements limités]

1. D'après un résultat du cours, on a déjà :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$

et on utilise que :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

et en primitivant, en utilisant que $\tan(0) = 0$, il vient :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

2. Par développements limités de cos et sin en 0, on a directement :

$$\cos(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\right) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5).$$

3. Comme ci-dessus, on a directement :

$$\sqrt{1+x}\cdot(\ln(1+x) - x) \underset{x\to 0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

4. On pose $x = 3 + h$ (avec donc h qui tend vers 0 pour x tendant vers 3). On a :

$$\ln(x) = \ln(3+h) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)$$

$$\underset{h\to 0}{=} \ln(3) + h/3 - \frac{(h/3)^2}{2} + \frac{(h/3)^3}{3} + \mathrm{o}(h^3) \underset{h\to 0}{=} \ln(3) + \frac{1}{3}h - \frac{1}{18}h^2 + \frac{1}{81}h^3 + \mathrm{o}(h^3)$$

$$\underset{x\to 3}{=} \ln(3) + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{18}(x-3)^2 + \frac{1}{81}(x-3)^3 + \mathrm{o}((x-3)^3)$$

5. Par développement limité de l'exponentielle en 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \underset{x\to 0}{=} \left(2 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2)\right)^{-1/2}$$

et en utilisant que $(1+u)^{-1/2} \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \mathrm{o}(u^2)$, avec $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2)$ (qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0), on déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \mathrm{o}(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{\sqrt{2}}{64}x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

6. On sépare numérateur et dénominateur. Et surtout on calcule de développement limité de l'inverse du dénominateur pour se ramener à un produit. On a :

$$\frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\mathrm{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right)$$

$$\exp(x)-1-x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)$$

et par produit :

$$\frac{\exp(x)-1-x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\right)\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x+\frac{5}{12}x^2+\frac{1}{12}x^3+\mathrm{o}(x^3)$$

Exercice 2 [Recherche d'une primitive]

On pose $f : x \mapsto \dfrac{x^4+5x^2-6x+8}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$ et $P(X) = X^4-2X^3+2X^2-2X+1$

1. Une racine évidente de P est 1.
   On a :
   — $P(1) = 1-2+2-2+1 = 0$;
   — $P'(1) = 4-6+4-2 = 0$;
   — $P''(1) = 12-12+4 = 4 \neq 0$.
   Donc 1 est racine double de P.
2. On pose la division euclidienne. On trouve :
   $$P = (X^2+1)(X^2-2X+1)+0$$
   et c'est normal de trouver un reste nul, car $X^2-2X+1 = (X-1)^2$ divise P comme 1 est racine double.
   Comme (X^2+1) n'a pas de racine réelle et est de degré 2, il est irréductible sur $\mathbb{R}$ et on a les factorisations suivantes, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$:
   $$P(X) = (X-i)(X+i)(X-1)^2 = (X^2+1)(X-1)^2.$$
3. On commence par effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. On trouve :
   $$X^4+5X^2-6X+8 = 1\cdot P+(2X^3+3X^2-4X+7)$$
   et donc la réduction en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de f est de la forme :
   $$f(X) = 1+\frac{2X^3+3X^2-4X+7}{(X-i)(X+i)(X-1)^2} = 1+\frac{a}{X-i}+\frac{b}{X+i}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{(X-1)^2}$$
   où a, b, c, d sont des complexes que l'on va déterminer :
   — en multipliant par $X-i$ et en évaluant en i, on trouve :
   $$a = 0+\frac{-2i-3-4i+7}{2i(i-1)^2} = \frac{-6i+4}{4} = 1-\frac{3}{2}i$$
   — en multipliant par $X+i$ et en évaluant en $-i$, on trouve :
   $$b = \frac{2i-3+4i+7}{-2i(-i-1)^2} = \frac{6i+4}{4} = 1+\frac{3}{2}i$$

— en multipliant par $(X-1)^2$ et en évaluant en 1, on trouve :

$$d = \frac{2+3-4+7}{(1-i)(1+i)} = \frac{8}{2} = 4$$

— en développant à un $\mathrm{o}(1/x)$ près en $+\infty$, on trouve :

$$\frac{2}{x} + \mathrm{o}(1/x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{a+b+c}{x} + \mathrm{o}(1/x)$$

donc $c = 2 - a - b = 0$.

Et finalement la décomposition sur $\mathbb{C}$ est bien celle de l'énoncé :

$$f(X) = 1 + \frac{1-(3/2)i}{X-i} + \frac{1+(3/2)i}{X+i} + \frac{4}{(X-1)^2}.$$

4. Pour $\mathbb{R}$, il suffit de regrouper les deux premières fractions :

$$\frac{1-(3/2)i}{X-i} + \frac{1+(3/2)i}{X+i} = \frac{2X+3}{X^2+1}$$

ce qui donne la décomposition :

$$f(X) = 1 + \frac{2X+3}{X^2+1} + \frac{4}{(X-1)^2}.$$

5. On primitive f grâce aux éléments simples. Notons déjà que, comme la seule racine réelle de P est 1, alors f est continue sur $]1;+\infty[$ ce qui légitime de la primitiver sur cet intervalle.
Pour tout $x > 1$, on a :

$$f(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1} + \frac{4}{(x-1)^2}$$

qu'on primitive directement par linéarité en :

$$x \mapsto x + \ln(x^2+1) + 3\arctan(x) - \frac{4}{x-1}.$$

Exercice 3 [Analyse probabiliste d'un tirage]

1. (a) Il y a 2 boules au départ :

— après le tirage 1 (sans remise) : il reste 1 boule.
— après le tirage 2 (avec remise) : il y a 1 boule.
— après le tirage 3 (sans remise) : il n'y en a plus.

Et donc il y a trois tirages en tout.

(b) Si la boule noire est tirée au premier tirage, qui est sans remise, l'urne ne contient plus de boule noire. Les deux tirages suivants donnent des boules blanches.

(c) Si on tire la boule blanche, il ne reste que des boules noires, et les deux derniers tirages ne donnent que des boules noires.
On a deux situations :

— si $X_1 = 1$: ce qui se fait avec probabilité 1/2 (les boules sont indiscernables), et alors $X_2 = X_3 = 0$ et $X = 1$;
— si $X_1 = 0$: ce qui se fait avec probabilité 1/2 (même argument), et alors $X_2 = X_3 = 1$ et $X = 2$.

Par formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$, on déduit les lois demandées :

— X_1, X_2 et X_3 ont même loi : ils prennent pour valeurs 1 et 0, avec $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \in [\![1;3]\!]$;

— X prend les valeurs 1 ou 2, avec : $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$.

2. Si on veut épuiser le nombre n de boules, il faut n tirages sans remise. On veut donc savoir jusqu'où compter pour avoir n nombres impairs : il y a donc $N = 2n - 1$ tirages.

   Plus précisément :

   — avant le tirage $2j$: il y a $n - j$ boules (car j tirages sans remise ont été faits) ;

   — Avant le tirage $2j + 1$: toujours $n - j$ boules (le tirage $2j$ sa fait avec remise).

3. Dans l'état initial, il y a n boules indiscernables, parmi lesquelles une seule noire, et donc :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{n-1}{n}$$

   On détermine $\mathbb{P}(X_2 = 1)$ par formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $((X_1 = 1), (X_1 = 0)$:

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1)$$

   et on utilise que :

   — si $X_1 = 1$: il n'y a plus de boule noire donc $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1)$;

   — si $X_1 = 0$: au tirage il y a une boule noire pour $n - 1$ boules en tout, donc $\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{n-1}$.

   Et finalement : $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{n}$.

   Donc X_1 et X_2 suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

4. (a) Il n'est plus possible de tirer la boule noire si elle a déjà été tirée à un tirage impair précédent.

   (b) On déduit que, si $X_{2j+1} = 1$, alors $X_1 = X_3 = \cdots = X_{2j-1} = 0$.

   Ainsi, on a l'inclusion :

$$(X_{2j+1} = 1) \subset ((X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-1} = 0))$$

   ce qui prouve l'intersection demandée en, en faisant l'intersection avec $(X_{2j+1} = 1)$, et en utilisant que :

$$A \subset B \Rightarrow A = A \cap B.$$

   (qui est même une équivalence).

   Par formule des probabilités composées, on a alors :

$$\mathbb{P}(X_{2j+1} = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=0}(X_3 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=X_3=0}(X_5 = 0) \ldots \mathbb{P}_{X_1=X_3=\cdots=X_{2j-1}=0}(X_{2j+1})1)$$

   qu'on détermine par dénombrement :

   — pour les premiers produits : à chaque tirage, on a une seule boule noire (comme les tirages sans remise ont donné une boule blanche) ; on a successivement n, $n-1$, ...,$n-j+1$ boules en tout ; et on veut tirer l'une des $n - 1$, $n - 2$, ...$n - j$ boules blanches ;

   — pour le dernier tirage : on a une boule noire, qu'on veut tirer, parmi $n - j$ boules en tout.

Comme les boules sont indiscernables, on trouve finalement :

$$\mathbb{P}(X_{2j+1} = 1) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j} = \frac{1}{n}.$$

(c) Pour X_{2j}, on a la même situation : si on veut tirer la boule noire, c'est qu'elle n'a pas été tirée lors d'un tirage pair précédent. On déduit ainsi :

$$(X_{2j} = 1) = (X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-1} = 0) \cap (X_{2j} = 1)$$

puis par probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{2j} = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=0}(X_3 = 0) \cdot \mathbb{P}_{X_1=X_3=0}(X_5 = 0) \ldots \mathbb{P}_{X_1=X_3=\cdots=X_{2j-1}=0}(X_{2j} = 1) \\ &= \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

car les situations à chaque étape sont exactement les mêmes.

Remarque : on pouvait y aller au bluff et mettre en évidence que toutes les boules ont un rôle parfaitement symétrique, et donc par équiprobabilité le fait de tirer la boule noire ou une autre est la même, d'où le $\frac{1}{n}$, mais on n'est pas comme ça.

5. On a donc pour tout $k \in [\![1; N]\!]$: $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{n}$.
   Et comme X_k est à valeurs dans $\{0, 1\}$, alors les X_k suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.
6. (a) Si on tire la boule noire au tirage $(2i + 1)$ (sans remise), alors la noire est sortie définitivement de l'urne. L'urne ne contient plus que des boules blanches.
   Et donc : $\mathbb{P}_{(X_{2i+1}=1)}(X_{2i+j+1} = 1) = 0$.
   Inversement, si on tire la boule noire au tirage $2i + j + 1$, elle n'a pas été tirée au tirage $2i + 1$.
   Et donc : $\mathbb{P}_{(X_{2i+j+1}=1)}(X_{2i+1} = 1) = 0$.

   (b) Si $X_{2i} = 1$, alors la boule noire est dans l'urne au tirage $2i$. Donc elle peut (ou non) rester dans l'urne aux tirages suivants.
   On fait le même processus qu'à la question 4), en utilisant que :

$$(X_{2i} = 1)\cap(X_{2i+2k} = 1) = (X_{2i} = 1)\cap(X_{2i+1} = 0)\cap(X_{2i+3} = 0)\cap\cdots\cap(X_{2i+2k-1} = 0)\cap(X_{2i+2k} = 1)$$

(la boule noire n'est pas tirée lors d'un tirage impair entre les tirages $2i$ et $2i + 2k$).
Et par formule des probabilités composées appliquée à chacune des intersections :

$$\mathbb{P}(X_{2i} = 1)\mathbb{P}_{X_{2i}=1}(X_{2i+2k} = 1) = \mathbb{P}(X_{2i} = 1)\mathbb{P}_{X_{2i}=1}(X_{2i+1} = 0)\mathbb{P}_{X_{2i}=1,X_{2i+1}=0}(X_{2i+3} = 0)\ldots\mathbb{P}_{X_{2i}=1,X_{2i+}$$

et après simplification par $\mathbb{P}(X_{2i} = 1)$ (qui vaut $1/n \neq 0$), et en reconnaissant les situations à chaque tirages dans les probabilités conditionnelles de droite, on déduit :

$$\mathbb{P}_{X_{2i}=1}(X_{2i+2k} = 1) = \frac{n-i-1}{n-i}\frac{n-i-2}{n-i-1}\cdots\frac{n-i-k+1}{n-i-k+2}\frac{1}{n-i-k+1} = \frac{1}{n-i}$$

ce qui donne bien le résultat.
L'autre calcul se fait exactement de la même manière : comme le tirage d'indice $2i + 2k$ se fait avec remise, la situation dans l'urne au tirage $2i + 2k + 1$ est exactement la même. Les probabilités de tirages sont les mêmes, et donc :

$$\mathbb{P}_{X_{2i}=1}(X_{2i+2k+1} = 1) = \mathbb{P}_{X_{2i}=1}(X_{2i+2k} = 1) = \frac{1}{n-i}.$$

7. Au $(2n-2)$ème tirage, l'urne ne contient qu'une seule boule, qu'on tire nécessairement. On aura donc tiré, après le $(2n-2)$-ème tirage, au moins une fois chaque boule. Donc la boule noire ne peut pas être tirée pour le première fois au tirage $(2n-1)$, donc $\mathbb{P}(U_n) = 0$.
8. On procède comme précédemment, en utilisant que :

$$U_j = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-2} = 0) \cap (X_{2j-1} = 1)$$

et par formules des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(U_j) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-j+1}{n-j-2}\frac{n-j+1}{n-j+2}\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j+1} = \frac{n-j}{n(n-1)}$$

9. L'événement $(X = 1)$ est l'union disjointe de U_j : si on ne tire qu'une seule fois la boule noire, c'est qu'on l'a tirée pour la première fois à un tirage impair. Et par union disjointe :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(U_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}\frac{n(n-1+0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

10. Si la boule noire est tirée n fois, cela veut dire qu'elle est tirée lors de $(n-1)$ tirages pairs, puis d'un tirage impair suivant. Mais il n'y a que $(n-1)$ tirages pairs, et donc cela veut dire que la boule noire est tirée à tous les tirages pairs, et au dernier. Et ainsi :

$$(X = n) = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 0) \cap (X_4 = 1) \cap \cdots \cap (X_{2n-2} = 1) \cap (X_{2n-1} = 1)$$

et par formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\frac{n-2}{n-1}\frac{1}{n-2}\frac{n-3}{n-2}\frac{1}{n-3}\cdots\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{1}\frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

ce qui prouve bien le résultat.

II Problème

II.1 Première partie

1. On a directement :
   - Si $x \in E$, alors $f(x) \in E$ (comme $f \in \mathcal{L}(E)$). Donc $f(E) \subset E$, et E est stable par f.
   - Si $x \in \{0\}$, alors $x = 0$ et par linéarité de f on déduit $f(x) = 0 \in \{0\}$. Donc $f(\{0\}) \subset \{0\}$ (c'est même une égalité) et $\{0\}$ est stable par f.
2. On a directement :
   (a) Si $x \in \mathrm{Ker} f$: alors $f(x) = 0 \in \mathrm{Ker} f$ (car $\mathrm{Ker} f$ est un espace vectoriel). Donc $f(\mathrm{Ker} f) \subset \mathrm{Ker} f$, et $\mathrm{Ker} f$ est stable par f.
   (b) Si $x \in \mathrm{Im} f$: notons $y \in E$ tel que $f(y) = x$. Alors $f(x) = f(f(y)) \in \mathrm{Im} f$. Donc $f(\mathrm{Im} f) \subset \mathrm{Im} f$, et $\mathrm{Im} f$ est stable par f.
3. (a) Comme f est non injectif, on a déjà $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$. Comme de plus f est non nul, on a également $\mathrm{Ker} f \neq E$. Et finalement il existe trois sous-espaces de E stables par f, à savoir $\{0\}$, $\mathrm{Ker} f$ et E.

(b) Notons déjà que, par théorème du rang, on a :

$$n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f)$$

et par imparité de n, on ne peut donc avoir $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$ (sinon ils auraient même dimension, et la dimension de E, qui en serait le double, serait paire).

Mais on a également que $\mathrm{Im} f$ est stable par E, et :

— $\mathrm{Im} f \neq \mathrm{Ker} f$: par imparité de n ;
— $\mathrm{Im} f \neq \{0\}$: car f n'est pas nul ;
— $\mathrm{Im} f \neq E$: car f n'est pas injective, et comme c'est un endomorphisme de E avec E de dimension finie elle n'est pas surjective non plus.

Et finalement on a bien quatre sous-espaces de E stables, à savoir $\{0\}$, $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ et E.

4. Procédons par double implication :

— si $\mathrm{Vect}(u)$ est stable par f : alors $u \in \mathrm{Vect}(u)$ donc $f(u) \in \mathrm{Vect}(u)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Et la famille (u) étant une base de $\mathrm{Vect}(u)$ (génératrice par définition de $\mathrm{Vect}(u)$, et libre car constituée d'un unique vecteur non nul), cela assure bien que λ est unique.
— si $f(u) = \lambda u$: soit $v \in \mathrm{Vect}(u)$. Posons $v = \alpha u$. Alors :

$$f(v) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha \lambda u \in \mathrm{Vect}(u)$$

et donc $\mathrm{Vect}(u)$ est bien stable par f.

D'où l'équivalence cherchée.

5. (a) On a directement :

— si $y \in \mathrm{Im} g$: notons $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Et alors :

$$f(y) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) \in \mathrm{Im} g$$

donc $\mathrm{Im} g$ est stable par f ;
— si $x \in \mathrm{Ker} g$: alors $g(x) = 0$. Puis :

$$g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(0) = 0$$

donc $f(x) \in \mathrm{Ker} g$. Donc $\mathrm{Ker} g$ est stable par f.

(b) Par récurrence, montrons le résultat suggéré :

— pour $k = 0$: $g^0 = \mathrm{id}$, qui commute bien avec f ;
— soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k \circ f = f \circ g^k$. Alors :

$$g^{k+1} \circ f = g \circ g^k \circ f \overset{HR}{=} g \circ f \circ g^k \overset{f \circ g = g \circ f}{=} f \circ g \circ g^k = f \circ g^{k+1}$$

ce qui prouve l'hérédité.

Et finalement par récurrence on a bien que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme g^k commute avec f.

Par linéarité de la composition, on déduit que pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k g^k\right) \circ f = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(g^k \circ f\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(f \circ g^k\right) = f \circ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k g^k\right)$$

ce qui prouve bien que tout polynôme en g commute avec f.

(c) En appliquant la question a) à $P(g)$ (qui commute bien avec f), on a directement le résultat.

II.2 Deux exemples d'un nombre fini d'espaces stables

6. (a) La famille $((1,0),(0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$: ceci assure l'existence et l'unicité d'un tel f par image d'une base donnée.

   Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a par linéarité :

   $$f(x,y) = f(x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)) = xf(1,0) + yf(0,1) = (-y, x).$$

   (b) Un tel système étant homogène, il admet toujours comme solution le vecteur nul. Il admet une solution non nul si, et seulement si, il admet une autre solution, c'est-à-dire si, et seulement si, son déterminant est nul.

   Or, son déterminant vaut $\lambda^2 + 1 \neq 0$.

   Et finalement, ce système n'admet jamais de solution non nulle.

   (c) Notons déjà que $\{0\}$ et E sont stables par f.

   Considérons F un autre espace stable par f. Nécessairement, F est de dimension 1 (car on a les inclusions strictes $\{0\} \subset F \subset E$). Notons $u \neq 0$ tel que $F = \mathrm{Vect}(u)$.

   Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. En notant $u = (a,b)$, on cherche donc $(a,b) \neq (0,0)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

   $$f(a,b) = (-b, a) = (\lambda a, \lambda b)$$

   c'est-à-dire qu'on est ramenés à la question précédente.

   Comme on a montré qu'il n'existe jamais de solution non nulle au problème précédent, on déduit qu'il n'existe pas de droite stable par f.

   Donc il n'existe que deux sous-espaces de E stables par f, à savoir $\{0\}$ et E.

   Notons que, en lien avec la question 3, on ne peut trouver de troisième sous-espace stable comme f est injectif.

7. (a) Même justification qu'à la question précédente. On trouve ici :

   $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = (y, 0)$$

   (b) Cette fois-ci, le déterminant du système est λ^2 : il possède une solution non nulle si, et seulement si, $\lambda^2 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$.

   (c) Par le même raisonnement qu'à la question précédente, on est ramené à trouver les vecteurs u non nuls tels que $f(u) = \lambda u$. Mais on a vu que la seule valeur possible pour λ est 0. Et donc la seule droite stable possible est incluse dans $\mathrm{Ker} f$.

   On trouve directement que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((1,0))$ (par l'expression de f).

   Et finalement il n'existe que trois sous-espaces de E stables par f, à savoir $\{0\}$, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((1,0))$ et E.

   Notons au passage que, en lien avec la question 2, on trouve que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$, cohérent avec le résultat de la question 3.

II.3 Trois exemples d'un nombre infini d'espaces stables

8. On s'intéresse ici aux espaces de la forme $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

   (a) Soit F un tel sous-espace. Soit $x \in F$.

   Alors $f(x) = \lambda x \in F$ (car F est un espace vectoriel).

   Donc F est stable par f.

   (b) i. Par l'absurde : si toutes les familles à deux vecteurs étaient liées.

   Considérons x non nul, de sorte que la famille (x) est libre. Alors elle est libre maximale, car toute famille (x, y) est liée. Donc (x) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$. Ce qui contredit que $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})) \geqslant 2$ (car alors cette dimension vaudrait 1.

   D'où le résultat par l'absurde.

ii. Considérons $\alpha \neq \beta$ deux scalaires, et montrons que les droites $D_1 = \text{Vect}(x + \alpha y)$ et $D_2 = \text{Vect}(x + \beta y)$.
Notons déjà que ce sont bien des droites, comme les vecteur $x+\alpha y$ et $x+\beta y$ sont non nuls (les familles (x, y) étant libres).
Montrons par exemple que D_1 n'est pas inclus dans D_2, en montrant que $x + \alpha y \notin D_2$.
Par l'absurde, si $x + \alpha y \in D_2$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que : $x + \alpha y = \mu\,(x + \beta y)$ puis :

$$(1-\mu)x + (\alpha - \mu\beta)y = 0$$

et par liberté de la famille (x, y) :

$$\mu = 1 \text{ et } \alpha = \beta$$

d'où la contradiction comme $\alpha \neq \beta$.
Donc $D_1 \neq D_2$.

iii. Les espaces $\text{Vect}(x + \alpha y)$ sont des sous-espaces de $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$, donc stables.
Il y en a une infinité (autant que de valeurs de α différentes).
Donc il y a une infinité d'espaces stables.

9. On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ D(P) = P'.$$

(a) Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
Alors $\deg(P) \leqslant n$.
Puis $\deg(P') \leqslant \deg(P) - 1 \leqslant n - 1$ (en séparant selon que P est constant ou non).
Donc $\deg(P') \leqslant n$.
Donc $D(P) = P' \in \mathbb{K}_n[X]$.
Donc $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D.

(b) i. Considérons $(P_1, \dots, P_r)$ base de F (qui existe comme F est de dimension finie).
Montrons que $n = \max\deg(P_i)$ convient :
— par degré d'une combinaison linéaire : tout $P \in F$ s'écrit comme combinaison linéaire, et est donc de degré au plus n. Donc $F \subset \mathbb{K}_n[X]$;
— en notant P parmi les P_i qui réalise le maximum précédent, P convient.

ii. Par degré d'un polynôme dérivé, on a directement :

$$\deg(P^{(k)}) = \begin{cases} n-k & \text{si} \quad k \leqslant n \\ -\infty & \text{si} \quad k > n \end{cases}$$

ce qui donne le résultat en notant que $D^k : P \mapsto P^{(k)}$, donc $D^k(P) = P^{(k)}$.

iii. On a déjà l'inclusion $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
Il suffit d'avoir une égalité des dimensions.
Mais la famille $(D^k(P))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre (constitué de polynômes non nuls de degrés distincts).
Comme elle est de cardinal $n+1$, on a donc : $\dim(F) \geqslant n + 1 = \dim\mathbb{K}_n[X]$.
Et avec l'inclusion précédente, on a également $\dim(F) \leqslant n + 1 = \dim\mathbb{K}_n[X]$.
Et finalement : $\dim F = \dim\mathbb{K}_n[X]$.
Comme on a déjà une inclusion, on conclut que ces ensembles sont égaux.

(c) Notons déjà que $\{0\}$, les $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$ sont stables par D.
Montrons que ce sont les seuls. Considérons donc $F \subset \mathbb{K}[X]$ stable par D :
— si $\dim F = 0$: alors $F = \{0\}$;

— si $\dim F \in \mathbb{N}^*$: par le point précédent on a $F = \mathbb{K}_{n-1}[X]$;

— sinon : alors F est de dimension infinie, donc inclus dans aucun des $\mathbb{K}_n[X]$. Il possède donc des polynômes de degrés arbitrairement grand. Mais le même raisonnement qu'à la question b) montre que, s'il possède un polynôme de degré n, il contient tout $\mathbb{K}_n[X]$. Comme ceci est vrai pour des n arbitrairement grands, il contient donc tout $\mathbb{K}[X]$. Donc $F = \mathbb{K}[X]$.

Ce qui prouve le résultat annoncé.

10. (a) Comme tous les espaces sont stables par f, en particulier $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f. Par la question 4., cela veut dire qu'il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

(b) i. Si (x, y) est liée : comme $x \neq 0$, il existe donc $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$. Et alors par linéarité de f :

$$\lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x(\mu x) = \lambda_x y$$

et par unicité de λ_y, on a bien $\lambda_x = \lambda_y$.

ii. Si (x, y) est libre : alors :

$$\lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_{x+y}(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

et comme la famille (x, y) est libre, on a unicité d'écriture d'une combinaison linéaire en x et y, de sorte que :

$$\lambda_{x+y} = \lambda_x \text{ et } \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

et donc $\lambda_x = \lambda_y$.

(c) Ainsi, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ f(x) = \lambda x$$

(le λ ne dépend pas de x par la question b).

Pour un tel λ, on a également :

$$f(0) = 0 = \lambda \cdot 0$$

ce qui donne :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \lambda x = (\lambda \mathrm{id})(x)$$

donc $f = \lambda \mathrm{id}$: c'est une homothétie.