

DS n°9

I Exercices

Exercice 1 [Calculs de développements limités]

Donner les développements limités suivants, aux ordres demandés et en les points considérés :

1. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0 ;
2. $\cos(x) - \sin(x)$ à l'ordre 5 en 0 ;
3. $\sqrt{1+x} \cdot (\ln(1+x) - x)$ à l'ordre 4 en 0 ;
4. $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 3 ;
5. $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ à l'ordre 2 en 0 ;
6. $\frac{\exp(x) - 1 - x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 2 [Recherche d'une primitive]

On pose $f : x \mapsto \frac{x^4 + 5x^2 - 6x + 8}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$ et $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$

1. Déterminer une racine évidente de P , et en donner sa multiplicité.
2. Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 - 2X + 1$. En déduire la factorisation de P comme produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que la décomposition en éléments simples de f sur $\mathbb{C}$ est :

$$f(X) = 1 + \frac{1 - (3/2)i}{X - i} + \frac{1 + (3/2)i}{X + i} + \frac{4}{(X - 1)^2}.$$

4. En déduire la décomposition en éléments simples de f sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

Exercice 3 [Des tirages dans une urne]

On considère une urne qui contient une boule noire et $(n - 1)$ boules blanches, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, toutes indiscernables. On vide complètement l'urne de manière en tirant successivement toutes les boules, une par une : le premier tirage se fait sans remise, le deuxième avec remise, le troisième sans remise, le quatrième avec remise, etc. Et donc on effectue des tirages jusqu'à vider toute l'urne, sachant que les tirages d'ordre impair se font sans remise, et ceux d'ordre pair avec remise.

On suppose que les tirages se font indépendamment.

On note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est tirée au k -ème tirage, et 0 sinon. On note X le nombre d'apparitions en tout de la boule noire lors des tirages.

1. On suppose pour cette question uniquement que $n = 2$.
 - (a) Donner le nombre de boules dans l'urne après chaque tirage, et en déduire le nombre de tirages.
 - (b) On suppose que la boule noire est tirée au premier tirage : que penser des deux tirages suivants ?
 - (c) En adoptant un raisonnement analogue si on tire la boule blanche au premier tirage, en déduire la loi de X_1, X_2, X_3 et X .
2. Quel est le nombre total N de tirage ? Et plus précisément, pour $j \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, combien de boules reste-t-il avant le $(2j)$ -ème tirage ? Et avant le $(2j + 1)$ -ème tirage ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0)$. En déduire $\mathbb{P}(X_2 = 1)$ et reconnaître les lois de X_1 et X_2 .
4. Soit $j \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$.
 - (a) À quelle condition n'est-il pas possible de tirer la boule noire lors des tirages numéro $2j$ et $2j + 1$?

(b) En déduire que :

$$(X_{2j+1} = 1) = (X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-1} = 0) \cap (X_{2j+1} = 1)$$

puis que $\mathbb{P}(X_{2j+1} = 1) = \frac{1}{n}$.

(c) Calculer de même la probabilité $\mathbb{P}(X_{2j} = 1)$.

5. En déduire la loi de toutes les variables X_k .

6. On s'intéresse aux probabilités conditionnelles entre les X_k :

(a) Soit $i \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$. On suppose avoir tiré la boule noire au tirage $2i+1$.

i. Que penser de l'urne ensuite ?

ii. En déduire pour tout $j \in \llbracket 1; 2n-2i-2 \rrbracket$ la valeur de $\mathbb{P}_{(X_{2i+1}=1)}(X_{2i+j+1} = 1)$ et de $\mathbb{P}_{(X_{2i+j+1}=1)}(X_{2i+1} = 1)$.

(b) Soit $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. On suppose avoir tiré la boule noire au tirage $2i$.

i. Que penser de l'urne ensuite ?

ii. En déduire pour tout $k \in \llbracket 1; n-i-1 \rrbracket$ que : $\mathbb{P}_{(X_{2i}=1)}(X_{2i+2k} = 1) = \frac{1}{n-i}$. En déduire de même pour tout $k \in \llbracket 0; n-i-1 \rrbracket$ que : $\mathbb{P}_{(X_{2i}=1)}(X_{2i+2k+1} = 1) = \frac{1}{n-i}$.

Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note U_j l'événement : "on obtient la boule noire pour la 1-ère fois au $(2j-1)$ -ème tirage".

7. Que penser de l'état de l'urne avant le $(2n-2)$ -ème tirage ? En déduire que $\mathbb{P}(U_n) = 0$.

8. Montrer que : $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(U_j) = \frac{n-j}{n(n-1)}$.

9. Exprimer l'événement $(X = 1)$ en fonction des U_j , et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 1)$.

10. Montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!}$. On pourra commencer par exprimer (X_n) à l'aide des variables aléatoires X_k pour $k \in \llbracket 1; 2n-1 \rrbracket$.

II Problème

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul.

Si f est un endomorphisme de E , et si F est un sous-espace vectoriel de E , on dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$.

Pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E on définit les endomorphismes f^n (pour $n \in \mathbb{N}$) par :

$$\begin{cases} f^0 = \text{id}_E, \\ f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n .

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, qu'on écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ (avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, et donc $P \in \mathbb{K}_n[X]$), et f endomorphisme de E , on définit l'endomorphisme :

$$P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k.$$

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

II.1 Généralités sur les espaces stables

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Montrer que $\{0\}$ et E sont stables par f .
2. Montrer que $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ sont stables par f .
3. On considère dans cette question uniquement que E est de dimension finie $n \geq 2$ et que f est non nul et est non injectif.
 - (a) Dédurre de la question précédente qu'il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f .
 - (b) On suppose de plus que n est impair : montrer que $\text{Im} f \neq \text{Ker} f$ et en déduire qu'il existe au moins quatre sous-espaces de E stables par f .
4. On considère $u \neq 0$. Montrer que la droite $\text{Vect}(u)$ est stable par f si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Et justifier alors qu'un tel λ est unique.
5. On suppose que $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f , c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$.
 - (a) Montrer que $\text{Im} g$ et $\text{Ker} g$ sont stables par f .
 - (b) Montrer que : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(g)$ commute avec f .

Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme g^k commute avec f .
 - (c) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$: $\text{Im}(P(g))$ et $\text{Ker}(P(g))$ sont stables par f .

II.2 Deux exemples d'un nombre fini d'espaces stables

6. On considère dans cette question uniquement que $E = \mathbb{R}^2$.
 - (a) Justifier qu'il existe un unique $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f(1, 0) = (0, 1) \text{ et } f(0, 1) = (-1, 0)$$

et donner l'expression de $f(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

- (b) Dire pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} \lambda a + b = 0 \\ -a + \lambda b = 0 \end{cases}$ (d'inconnues $a, b \in \mathbb{R}$) possède une solution non nulle.
- (c) En déduire que f n'admet que deux sous-espaces stables. On pourra raisonner suivant la dimension des espaces stables, et utiliser le résultat de la question 4.
7. On considère dans cette question uniquement que $E = \mathbb{R}^2$.
- (a) Justifier qu'il existe un unique $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f(1, 0) = (0, 0) \text{ et } f(0, 1) = (1, 0)$$

et donner l'expression de $f(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

- (b) Dire pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} \lambda a - b = 0 \\ \lambda b = 0 \end{cases}$ possède une solution non nulle.
- (c) En déduire que f n'admet que trois sous-espaces stables. On pourra raisonner suivant la dimension des espaces stables, et utiliser le résultat de la question 4.

II.3 Trois exemples d'un nombre infini d'espaces stables

8. On s'intéresse ici aux espaces de la forme $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.
- (a) Montrer que tout sous-espace de E inclus dans $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, est stable par f .
- (b) On suppose ici qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{id})) \geq 2$.
- Justifier qu'il existe deux vecteurs $x, y \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ tels que la famille (x, y) est libre.
 - Montrer qu'alors toutes les droites $\text{Vect}(x + \alpha y)$, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, sont distinctes.
 - En déduire qu'il existe une infinité de sous-espaces de E stables par f .
9. On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], D(P) = P'.$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$: montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D .
- (b) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D .
- Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme P de degré n tels que $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ et $P \in F$.
 - Exprimer le degré, pour $k \in \mathbb{N}$, de $D^k(P)$. On pourra distinguer selon que $k \leq n$ ou $k > n$.
 - En déduire que $F = \mathbb{K}_n[X]$.
- (c) À l'aide des deux questions précédentes, donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D .
10. On suppose dans cette question que tous les sous-espaces de E sont stables par f .
- (a) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
- (b) Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$.
- Si (x, y) est liée, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
 - Si (x, y) est libre, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
- Indication* : on pourra calculer $f(x + y)$ pour faire apparaître λ_{x+y} .
- (c) Montrer que f est une homothétie.