DS n^{o}8

Erreurs générales

1. L'énoncé n'est pas bien lu : certains ne répondent pas à la question, mais à quelque chose qui en est proche, sans conclure, ou ne répondent qu'à une partie de la question.
2. Les notations des questions ne sont pas toujours utilisées, et parfois les objets introduits dans l'énoncé n'apparaissent pas dans les copies (c'est louche).
3. Les indications ne sont pas lues : elles sont là pour aider pourtant.
4. Les liens entre les questions, ou au sein même des questions, sont là pour aider à répondre aux questions : il faut s'appuyer dessus pour avancer dans la résolution. Inversement, si un résultat rend absolument inutile des questions, il faut peut-être remettre en question ce résultat.
5. Certains montrent des résultats plus forts ou plus faibles que ce qui est demandé dans l'énoncé : dans un cas comme dans l'autre, ça ne va pas. Dans le premier, c'est suspect, et dans le second c'est insuffisant.
6. Certains types d'exercices reviennent souvent, et il faut maîtriser le type de rédaction associées : les déterminations den noyaux se font par équivalences (ce sont des résolutions d'équation) ; les raisonnements par l'absurde sont à éviter si possible ; les récurrences ne doivent souffrir d'aucun défaut de rédaction.
7. Quelques objets sont mal manipulés, avec des choses qui n'ont pas vraiment de sens :
   - les polynômes : on voit plusieurs fois apparaître des équivalences comme $aX + b = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{-b}{a}$ qui n'ont aucun sens : X est une indéterminée, pas un réel (et il faudrait d'ailleurs vérifier que $a \neq 0$ pour diviser par a) ; ou alors des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui se rajoutent pour multiplier des polynômes...
   - les composées : pour la composée $g \circ f$, les faut faire attention aux ensemble de départ de f et g, et aussi à l'ensemble d'arrivée de f. Cela n'a pas de sens de parler de "composée de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$" : il faudrait plutôt parler de la composée d'une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et d'une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
8. Il y a parfois des passages complètement faux, que le correcteur n'aurait pas à lire, mais ce n'est pas clair : il faut **BARRER PROPREMENT ET SANS AMBIGUITE** ces passages. Certains se contente de faire de vagues parenthèses dans la marge en écrivant "c'est faux", et ça ne suffit pas. Si vous écrivez quelque chose de faux dans une question, vous y perdrez des points. Si vous ne voulez pas que quelque chose soit compté dans une question, parce que vous savez que c'est faux, barrez le proprement et passez à la suite.

I Exercices

Exercice 1 [Détermination d'une application linéaire]

1. Peu de choses à connaître sur les polynômes, mais il faut absolument identifier les familles échelonnées (et mieux : voir si elles sont graduées) pour reconnaître des familles libres ou des bases avec des polynômes. La recherche des coordonnées est une résolution d'équation : on le fait par équivalence.
2. Pas de problème, mais nécessitait la question 1 (il y avait "en déduire") donc c'était inutile de chercher à répondre à cette question sans avoir fait la précédente.

3. Certains trouvent des noyaux étranges, ou oublient les bases.

   Astuce : quand on trouve une base du noyau, on vérifie que chaque élément de la base est bien dans le noyau (beaucoup d'erreurs auraient été évitées ainsi).

   Pour l'image comme le noyau, beaucoup rédigent mal, et ne montrent en fait qu'une inclusion.
4. La plupart se doutait qu'on avait un projecteur. Il faut alors bien redonner sur quoi il projette et parallèlement à quoi.

Exercice 2 [Une inégalité]

1. Certains donnent l'ensemble sans justifier. Ou se trompent (en prenant 1 dans l'ensemble de définition).
2. On justifie qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ dès le départ : pas besoin de dire (comme beaucoup trop) qu'elle est dérivable, puis de voir que sa dérivée est dérivable, puis de voir que la dérivée de sa dérivée est continue. Et aussi il faut faire attention à la justification dans une composée. On a deux choix :
   — ou bien on fait très proprement les choses, en précisant bien les ensembles images à chaque fois (c'est le mieux à faire) :
   — on bien on dit directement qu'on a une composée (sans préciser les ensembles images) : c'est moins bien, mais c'est juste.

   Mais on n'écrit pas que : "on a une composée de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $]1;+\infty[$ donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $]1;+\infty[$", car c'est faux : la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x-1))$ aurait les mêmes hypothèses, mais une conclusion erronée.
3. Quelques "le signe de f dépend de celui de $\ln(x)+1$" résistent encore, et devraient (je l'espère) capituler d'ici la fin de l'année. Aussi, on a une inégalité à prouver ensuite sur $]1;+\infty[$ donc c'est dommage de ne pas avoir une même convexité/concavité sur cet intervalle.
4. Peu réussie alors que pas si difficile : il suffit d'appliquer la définition avec $a, b \in D_f$ et $t = 1/2$. Beaucoup cherchent des choses très compliquées. Et quelques justifications imparfaites : on ne peut pas, même quitte à les échanger, supposer que $a < b$ parce qu'on pourrait avoir $a = b$...

Exercice 3 [Une suite récurrente]

1. Point positif : réflexe bien assimilé d'étudier les variations de $f = \cos - \mathrm{id}$. En revanche :
   — l'indication n'est pas utilisée : certains invoquent une 2π-périodicité, donc on ne voit pas pourquoi se limiter à $[-1;1]$;
   — la **stricte** monotonie de f est oubliée, alors qu'elle est indispensable pour l'utilisation du corollaire du TVI (ou du théorème de la bijection monotone) ;
   — il manque parfois des hypothèses : sur les valeurs de f au bord, sa stricte monotonie, ou sa continuité ;
   — beaucoup se compliquent la vie avec des $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = cos(1) + 1 \geqslant 0$ alors que f est définie (et continue) en 1, donc pas besoin de faire des limites.
2. Le fait que $K \in [0;1[$ est souvent oublié. Et en particulier le fait que $K < 1$ est le cœur de cette question. Par exemple, si on considère $\varphi : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ sur $I = [1;+\infty[$, on aura bien :

   $$\forall x \in I,\ |\varphi(x)| < 1$$

   mais on ne pourra pas pour autant trouver $K \in [0;1[$ tel que :

   $$\forall x \in I,\ |\varphi(x)| \leqslant K$$

   donc il y avait une subtilité ici, et beaucoup sont passés à côté.

3. Le fait que $n \in \mathbb{N}^*$ était important : c'est ce qui permettait d'appliquer l'inégalité des accroissements finis. Donc il fallait l'expliquer.

   Astuce : on ne montre pas une hérédité par récurrence

   Beaucoup ont annoncé prouver la première inégalité par récurrence, ce qui n'est pas possible. Et d'ailleurs certains se sont ravisés en se rendant compte que ce n'était pas une récurrence (on n'utilisait pas HR).

   Fin de la question bien traitée.

4. Beaucoup concluent mal que la suite (u_n) tend vers ℓ :
   - on ne peut pas faire de "passage à la limite" si on n'a pas prouvé l'existence d'une limite. On ne peut donc pas écrire $\lim(u_n - \ell)$ avant d'avoir montré que $(u_n - \ell)$ possède une limite ;
   - il faut donc un théorème d'existence pour conclure : ici le théorème d'encadrement fait le travail. Et il faut garder en tête systématiquement les théorèmes d'existence quand on veut conclure sur une limite (il en faudra nécessairement un).

Exercice 4 [Une primitive de la fonction Arccos] onie, signe, etc.).

Exercice qui était comme celui fait dans le cours pour Arcsin : c'est dommage de ne pas l'avoir mieux réussi, car c'était la même chose...

1. Définitions étranges souvent. Un dessin aurait été utile pour ne pas dire de bêtises (que je ne me permettrai pas d'écrire ici).
2. L'indication a été oubliée par beaucoup, et permettait de mieux comprendre ce qu'on attendait de cette question (à savoir de redémontrer des résultats du cours). Des erreurs de signe sur la dérivée. Et surtout on n'a pas besoin de calculer la dérivée de Arccos pour justifier son caractère $\mathcal{C}^\infty$: il découle directement de celui de cos ! Aussi, certains justifient la dérivabilité de Arccos sur $]-1;1[$ en disant que $\cos'$ est nul en 0 et π : cela dit seulement que Arccos n'est **pas dérivable** en ± 1, mais pas qu'elle est dérivable sur $]-1;1[$.
3. On voulait une primitive de Arccos, et c'était f. Donc il fallait s'étonner de trouver une autre dérivée que Arccos pour f. Aussi, certains justifient la continuité/dérivabilité avec des "composées de fonctions continues sur $[-1;1]$/dérivables sur $]-1;1[$" : la seule composée est avec la racine carrée, qui n'est ni continue sur $[-1;1]$, ni dérivable sur $]-1;1[$, donc je ne sais toujours pas de quelle fonction ils parlaient.

   Les hypothèses sur le théorème de la limite de la dérivées sont oubliées (la continuité de f sur $[-1;1]$ était indispensable par exemple). Et surtout : **ON NE PROLONGE PAS UNE DÉ RIVÉ E !** Et la conclusion était celle suggérée par la question : f est dérivable en ± 1 (et pas des choses étranges avec des prolongements de f ou de f').

II Problèmes

II.1 Problème 1 : Endomorphisme sur un espace de polynômes

Partie I. Un exemple.

1. Le fait que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ est souvent oublié.
2. Noyau non déterminé par équivalences (donc seulement un inclusion), certains travaillent dans $\mathbb{R}_2[X]$, et on pourrait s'étonner de trouver $\{0\}$ vue la tournure de la question. Des erreurs dans les calculs, et certains trouvent $\text{Ker}\varphi = \{aX^3 - 9aX | a \in \mathbb{R}\}$ mais donnent une base à deux éléments (alors que c'est directement une droite).

3. C'était juste la méthode systématique qui était détaillée : on détermine l'image d'une base pour avoir une base de l'image. Beaucoup n'explicitent pas les calculs, donc ne peuvent trouver une base. Ou alors ne prennent qu'un seul k à la fois pour l'image (et donc oublient une grosse partie), et devraient s'en rendre compte comme ce qu'ils écrivent n'a aucun sens.
4. Question mal traitée. Et qui aurait dû permettre à beaucoup de détecter des erreurs : ceux qui ont trouvé que $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$ et/ou que $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}_3[X]$ devraient se demander pourquoi avoir besoin de 4 questions pour trouver un supplémentaire de $\{0\}$...

Partie II. Le cas général.

Beaucoup ont traité le cas général (n quelconque, m quelconque) alors qu'ils n'ont pas réussi à prouver le cas particulier de la partie I ($n = 3$, $m = -1/3$). Et inversement, certains ont réussi la partie I mais ne font pas le lien avec le cas général : ils trouvent des résultat en contradiction avec ce qu'ils ont trouvé en partie I sans que ça les gêne.

6. Le fait que φ soit à valeur dans $\mathbb{R}_n[X]$ est souvent oublié.
7. Il suffisait de voir que la famille des $\varphi(X^d)$ était échelonnée, mais cela demandait de bien justifier les degrés. Le faire sur des exemples précis était utile.
8. Les résolutions d'équations différentielles sont à revoir. Et surtout personne ne fait le lien entre la question 8 et les précédentes : il s'agissait d'utiliser la bijectivité de φ lorsque $m = 0$ (prouvée en question 7).
9. Sensiblement les mêmes problèmes qu'en question 7.

II.2 Problème 2 : Équation fonctionnelle

Problème difficile : les justifications ne sont pas faites proprement. Une seule copie a grapillé quelques points dans ce problème. Les autres l'ont effleuré, en donnant des résultats sans justification, ce qui n'a pas fait beaucoup de points.

Partie I. Le cas où g est la fonction identité : des exemples.

1. Certains concluent seulement que certaines valeurs conviennent, sans prouver que ce sont toutes les valeurs. Beaucoup oublient les quantificateurs, ce qui rend les choses fausses. Par exemple, on n'a pas : $a^2x + (a+1)b = x \Leftrightarrow a^2 = 1$ et $(a+1)b = 0$ car par exemple, pour $x = 0$, $a = 37$ et $b = -1$ conviennent. Donc il faut bien le "$\forall x \in \mathbb{R}$".
2. Exactement les mêmes problèmes.
3. Beaucoup dérivent, alors qu'on ne sait pas a priori que f est dérivable. Le raisonnement par l'absurde est étrange. Et (très important) il existe des fonctions qui ne sont pas monotone, et une fonction monotone non strictement monotone n'est pas nécessairement constante...

Partie II. Le cas où g est la fonction identité : étude générale.

4. Comme pour la 3, on attendait une justification pour le calcul de la dérivée.
5. Le fait que f est $\mathcal{C}^1$ est oublié toujours (et donne des justifications étranges, reposant sur le fait que toute fonction est monotone).
6. La bijectivité demandait nécessitait de montrer que f était surjective, ce qui a été oublié (certains se contente de la bijection monotone sans s'intéresser aux images).

   Et la fin n'a pas été traitée (à part ceux qui ont vu les similitudes en la question 10 et l'exercice 3).