DS n^{o}8

Ce devoir est constitué de quatre exercices et de deux problèmes :

— les quatre exercices sont à traiter par tout le monde ;

— chaque élève ne traitera qu'un seul des deux problèmes, et fera figurer clairement le problème choisi. Le premier problème est considéré comme plus simple.

— les exercices comme les problèmes se veulent progressifs, tant entre eux que dans leurs questions ; il est conseillé de particulièrement bien traiter les premières questions.

I Exercices

Exercice 1 [Détermination d'une application linéaire]

On considère ici $E = \mathbb{R}_3[X]$

1. On définit les vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ suivants :

$$e_1 = 1,\ e_2 = X + 1,\ e_3 = X^2 + 1,\ e_4 = X^3 + X^2 + X + 1.$$

Justifier que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, et donner les coordonnées de $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ dans cette base.

2. En déduire, pour $P = aX^3+bX^2+cX+d$, l'expression de $f(P)$ où $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'unique application linéaire qui vérifie :

$$f(e_1) = f(e_3) = e_1 \text{ et } f(e_2) = f(e_4) = e_2.$$

3. Déterminer le noyau et l'image de f, et donner une base de chacun.
4. Calculer $f \circ f$, et en déduire une description la plus précise possible de f.

Exercice 2 [Une inégalité]

On considère ici la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition, et donner f''.
3. En déduire la convexité ou la concavité de f.
4. En déduire que :

$$\forall a, b, \in]1; +\infty[,\ \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Exercice 3 [Une suite récurrente]

On souhaite étudier le comportement de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n).$$

1. Montrer que la fonction cos possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$. On notera ce point fixe ℓ pour la suite de l'exercice.

Indication : on pourra commencer par montrer qu'elle possède un unique point fixe sur $[-1; 1]$.

2. Montrer qu'il existe une constante $K \in [0; 1[$ telle que :

$$\forall x \in [-1; 1],\ |\cos'(x)| \leqslant K.$$

3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant K|u_n - \ell|$$
puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \ell| \leqslant K^{n-1}|u_1 - \ell|.$$
4. Conclure.

Exercice 4 [Une primitive de la fonction Arccos]

On souhaite ici déterminer une primitive de la fonction Arccos. On va redémontrer certaines propriétés de cette fonction. On peut utiliser librement toutes les propriétés des fonctions cos et sin (caractère $\mathcal{C}^\infty$, dérivées successives, monotonie, signe, etc.).

1. Rappeler la définition de la fonction Arccos en tant que bijection réciproque de la fonction cos. On précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée de Arccos.
2. À l'aide des théorèmes généraux de continuité ou de dérivabilité, justifier, avec les bonnes hypothèses, sur quel(s) intervalle(s) la fonction Arccos est : continue, dérivable, $\mathcal{C}^\infty$. Et donner sa fonction dérivée.
   Indication : on pourra commencer par simplifier l'expression $\sin(\text{Arccos}(x))$ pour $x \in]-1;1[$.
3. On pose $f : x \mapsto x\text{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$.
   (a) Montrer que f est définie et continue sur un intervalle de la forme $[a;b]$ le plus grand possible (et on donnera explicitement a et b).
   (b) En le justifiant très proprement, montrer que f est dérivable sur $]a;b[$ et donner sa fonction dérivée en ces points.
   (c) Montrer que f est dérivable en a et en b et donner sa dérivée.
   Indication : il est fortement déconseillé d'utiliser un taux d'accroissement.
   (d) En déduire que f est l'unique primitive de Arccos sur $[-1;1]$ qui s'annule en 0.

II Problèmes

II.1 Problème 1 : Endomorphisme sur un espace de polynômes

Partie I. Un exemple.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \varphi(P) = P'' - \frac{1}{3}XP' + P.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de φ, dont on donnera une base. L'application φ est-elle injective ?
3. Déterminer $\varphi(X^k)$ pour $k \in [\![0,3]\!]$. En déduire $\text{Im}(\varphi)$ et en donner une base. L'application φ est-elle surjective ?
4. On souhaite montrer que $\mathbb{R}_3[X] = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$:
   (a) Montrer que $\text{Ker}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$ sont en somme directe.
   (b) Pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, trouver $Q \in \text{Ker}\varphi$ tel que $\deg(P - Q) \leqslant 2$.
   (c) En déduire que $\mathbb{R}_3[X] = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$, et donner pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ l'écriture de P sous la forme :
   $$P = P_1 + P_2 \text{ avec } P_1 \in \text{Ker}\varphi,\ P_2 \in \text{Im}\varphi.$$
   (d) En déduire l'expression générale de ψ, projection sur $\text{Ker}\varphi$ parallèlement à $\text{Im}\varphi$.

Partie II. Le cas général.

Dans toute cette partie, m est un paramètre réel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = P'' + mXP' + P.$$

6. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. *Etude du noyau de φ.*
   (a) Soit P un polynôme non constant. On note d le degré de P et a_d le coefficient dominant de P. Déterminer le coefficient de X^d dans l'expression de $\varphi(P)$.
   (b) En déduire que si $m \notin \{-1, -1/2, -1/3, \dots, -1/n\}$, alors φ est bijective.
   Indication : on pourra étudier le caractère libre ou générateur de la famille des $\varphi(X^d)$ dans ce cas.
8. Soit (E) l'équation différentielle

$$(E)\ : y''(x) + y(x) = Q(x)$$

   où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est fixé.
   (a) Montrer que (E) possède une unique solution polynomiale de degré inférieur ou égal à $\deg Q$. Montrer alors qu'il s'agit même de l'unique solution polynomiale de (E) (sans considération sur le degré), et que son degré est celui de Q.
   (b) Résoudre le problème de Cauchy

$$(E_0) \begin{cases} y''(x) + y(x) &= x^2 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

9. On suppose réciproquement qu'il existe $d \in [\![1, n]\!]$ tel que $m = -1/d$.
   (a) Déterminer, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, le degré de $\varphi(X^k)$.
   Indication : on pourra distinguer les cas selon que $k = d$ ou $k \neq d$.
   (b) En déduire :
      i. que la famille $\big(\varphi(1), \dots, \varphi(X^{d-1})\big)$ est une base de $R_{d-1}[X]$;
      ii. que $\varphi(X^d) \in \mathrm{Vect}(\varphi(1), \dots, \varphi(X^{d-1}))$;
      iii. que la famille $\big(\varphi(1), \dots, \varphi(X^{d-1}), \varphi(X^{d+1}), \dots, \varphi(X^n)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$;
      iv. si l'application φ est injective, surjective ou bijective.

II.2 Problème 2 : Équation fonctionnelle

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on s'intéresse dans ce problème à l'existence (ou la non-existence) de fonctions $f : I \to I$ et $g : I \to I$ vérifiant l'équation

$$f \circ f = g.$$

Partie I. Le cas où g est la fonction identité : des exemples.

1. Soient a et b deux réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction affine définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b.$$

   Pour quelles valeurs de a et b a-t-on

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = x.$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f\ :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ la fonction "puissance α" :

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ f(x) = x^{\alpha}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de α a-t-on

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ (f \circ f)(x) = x.$$

3. Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = x.$$

Montrer que f est strictement croissante, puis que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$. *On pourra raisonner par l'absurde pour le second pointà montrer.*

Partie II. Le cas où g est la fonction identité : étude générale.

Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$(\star) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = x.$$

On suppose dans toute cette partie que f n'est pas la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

4. En dérivant $(\star)$, montrer que f' ne s'annule pas.
5. En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. *On pourra utiliser la question 3.*
6. Montrer que f est bijective et que $f = f^{-1}$. Qu'en déduit-on quant au graphe de f ?
7. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
8. Montrer que f possède un unique point fixe noté α. Que vaut $f'(\alpha)$?
9. *Un exemple.* Montrer qu'il existe une unique fonction $h\ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f\ :\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-x} - 1 & \text{si} & x < 0 \\ h(x) & \text{si} & x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$$

soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
Tracer le graphe de la fonction f ainsi obtenue.

Partie III. Un exemple de non-existence (Oral X PC).

10. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ possède une unique solution notée α et que $\alpha \in]0, \pi/2[$.
11. En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = \cos(x).$$