DS n^{o}7

I Exercices

Exercice 1 [Familles libres et bases d'espaces vectoriels]

1. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :
$$(x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ z + t & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (-y, y, -t, t) \Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$$
et donc : $E = \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$, ce qui prouve bien que :
   - c'est un espace vectoriel : c'est l'espace vectoriel engendré par la famille $((-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$;
   - la famille $((-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$ en est une base : elle est génératrice (par construction), et elle est libre (famille de deux vecteurs ne comportant pas des 0 au même endroit, donc clairement non proportionnels).
2. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda\cos + \mu\sin + \nu\tan$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in]-\pi/2; \pi/2[,\ \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \nu\tan(x) = 0.$$
En évaluant en 0, on déduit $\lambda = 0$. Puis en évaluant en $\pi/3$ et $\pi/4$ on déduit :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda\sqrt{3}/2 + \mu\sqrt{3} & = & 0 \\ \lambda\sqrt{2}/2 + \mu & = & 0 \end{array} \right.$$
et donc (λ, μ) sont solution d'un système linéaire homogène inversible (son déterminant vaut $\sqrt{3}/2 - \sqrt{6}/2 \neq 0$), donc $\lambda = \mu = 0$.
Et finalement $\lambda = \mu = \nu = 0$: la famille est libre.
3. L'ensemble F est l'ensemble des suites linéaires récurrentes d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$. Donc :
$$F = \{(u_n) = (\lambda + \mu n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$
c'est-à-dire que F est l'ensemble des suites arithmétiques (le premier terme est λ et la raison est μ avec les notations précédentes) : ce n'était pas demandé, mais c'est joli de le remarquer.
On note $u = (1)$ (la suite constante de valeur 1) et $v = (n)$ (suite arithmétique de premier terme nul et de raison 1. Alors :
   - $F = \text{Vect}(u, v)$, donc c'est un espace vectoriel ;
   - (u, v) est une base de F : elle est génératrice (directement par description des éléments de F ; et elle est libre (u et v ne sont clairement pas proportionnels, en regardant le comportement en $+\infty$ par exemple).
4. On a directement, par résolution de l'équation $y'' = 3y' - 2y$ que :
$$G = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(f, g)$$
où $f : x \mapsto e^{2x}$ et $g : x \mapsto e^x$.
Comme avant, ceci assure que G est un espace vectoriel, et (f, g) en est une base : elle est génératrice par construction, et clairement libre (constituée de deux vecteurs non proportionnels).
5. Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

— avec $f = 0$ (la fonction nulle), on a : $f(\pi) = 0 = f''(37)$ donc $f \in H$; donc $0 \in H$;

— soient $f, g \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(\pi) = f''(37) \text{ et } g(\pi) = g''(37)$$

puis en posant $h = \lambda f + \mu g$, on a :

$$h(\pi) = \lambda f(\pi) + \mu g(\pi) = \lambda f''(37) + \mu g''(37) = h''(37)$$

donc $h \in H$. Donc H est stable par combinaisons linéaires.

Et finalement H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: c'est donc un espace vectoriel !

Exercice 2 [Étude d'une suite récurrente]

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

1. On a le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x+1}$	1 $\nearrow$	$+\infty$

Et pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x - \sqrt{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 \leqslant x + 1$$

et donc $x - \sqrt{x+1}$ est du signe de :

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

qui est négatif pour $x \in]\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ et positif sinon.

Comme $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, on déduit que $x - \sqrt{x+1}$ s'annule (en changeant de signe) seulement en $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$, ce qui donne le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x - \sqrt{x+1}$		$-$	0	$+$	

2. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

— pour $n = 0$: $u_0 \in \mathbb{R}_+$, ce qui prouve l'initialisation ;

— hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \in \mathbb{R}_+$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

3. La suite (u_n) étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on déduit que la suite (u_n) est monotone. Sa monotonie est donnée suivant le signe de $u_0 - u_1 = u_0 - \sqrt{u_0+1}$, et plus précisément :
   — si $u_0 \in [0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$: alors (u_n) est strictement croissante ;
   — si $u_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: alors (u_n) est constante ;
   — si $u_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: alors (u_n) est décroissante.
4. On a trois cas :
   — si $u_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: alors (u_n) est constante, et converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;
   — si $u_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: alors (u_n) est décroissante, et est minorée (par 0) donc converge. Sa limite ℓ est un point fixe de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ (par continuité de cette fonction), et donc un point d'annulation sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto x - \sqrt{x+1}$. Donc elle converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;
   — si $u_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: alors on par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:
     — pour $n = 0$: c'est vrai par hypothèse ;
     — hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Alors en appliquant la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ (strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$), on trouve :
     $$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} < \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
     ce qui prouve l'hérédité.

     D'où le résultat par récurrence.

     Et finalement (u_n) est croissante, majorée (par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) donc converge vers ℓ. Et à nouveau par continuité de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ on trouve que ℓ est un point fixe, donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Et finalement, peu importe la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3 [Un étude d'ensemble de matrice]

On considère a, b, c trois réels tels que $b \neq 0$. On définit les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et on note E l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est-à-dire que $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, MA = AM\}$.

1. On a : $OA = O = AO$. Donc $O \in E$.
   Soient $M, N \in E$ et $\lambda, \mu \in E$. Alors par bilinéarité du produit matriciel :
   $$(\lambda M + \mu N)A = \lambda MA + \mu NA = \lambda AM + \mu AN = A(\lambda M + \mu N)$$
   et donc $(\lambda M + \mu N) \in E$.
   Et donc E est un espace vectoriel.

2. Les matrices A et I sont clairement non proportionnelles comme $b \neq 0$. Donc la famille (A, I) est libre.
   On sait que $\text{Vect}(A, I)$ est le plus petit espace vectoriel contenant A et I. Pour montrer que $\text{Vect}(A, I) \subset E$, comme E est un espace vectoriel, il suffit de montrer que $A, I \in E$:
   — pour A : $A \cdot A = A^2 = A \cdot A$ (on a inversé les deux A), donc $A \in E$;
   — pour I : $A \cdot I = A = I \cdot A$ donc $I \in E$.
   Et finalement $A, I \in E$, ce qui prouve bien que $\text{Vect}(A, I) \subset E$.
3. On pose pour cette question $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in E$.
   (a) On calcule directement les produits matriciels. On a :
   $$AM = \begin{pmatrix} a\alpha - b\gamma & a\beta - b\delta \\ b\alpha + c\gamma & b\beta + c\delta \end{pmatrix} \text{ et } MA = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b & -\alpha b + \beta c \\ \gamma a + \delta b & -\gamma b + \delta c \end{pmatrix}.$$
   (b) Comme $M \in E$, alors $AM = MA$. En regardant les coefficients d'indice $(1, 1)$ et $(1, 2)$ de ces deux matrices, on déduit :
   $$a\alpha - b\gamma = \alpha a + \beta b \text{ et } a\beta - b\delta = -\alpha b + \beta c$$
   où la première égalité donne $\beta + \gamma = 0$ (en ramenant du même côté du signe "=", et en utilisant que $b \neq 0$). Et la seconde directement $a\beta + b\alpha = b\delta + c\beta$ (sans utiliser la non-nullité de b).
   (c) On a directement :
   $$bM + \beta A = \begin{pmatrix} \alpha b + \beta a & 0 \\ \gamma b + \beta b & b\delta + \beta c \end{pmatrix} = (\alpha b + \beta a)I$$
   en utilisant les deux égalités précédentes. Ce qui prouve bien que $bM + \beta A \in \text{Vect}(I)$.
   En notant $\lambda = \alpha b + \beta a$, on a ainsi :
   $$M = \frac{1}{b} bM = \frac{-\beta}{b} A + \frac{\lambda}{b} I \in \text{Vect}(A, I)$$
   ce qui prouve le résultat.
4. Et finalement (A, I) est bien une base de E :
   — par la question 2 : on a montré que c'est une famille libre d'éléments de E ;
   — par la question 3 : on a montré qu'elle est génératrice.
   Et plus précisément, avec la dernière question, on a vu que pour un tel $M \in E$ on a :
   $$M = \frac{-\beta}{b} A + \frac{\alpha b + \beta a}{b} I$$
   ce qui donne les coordonnées dans cette base.

Exercice 4 [Étude d'une suite implicite] Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $f_n \ :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f_n(x) = nx + \ln(x).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable (par combinaison linéaire) sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = n + \frac{1}{x} > 0$$
   ce qui prouve que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Par opération sur les limites (pas de forme indéterminée), on a directement les limites :
   $$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

2. Pour n fixé, on a vu que les fonction f_n est strictement croissante, et tend vers $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction f_n est continue, on déduit par théorème de la bijection monotone qu'elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$: 0 possède donc un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui veut bien dire que l'équation "$f_n(x) = 0$" possède une unique solution x appartenant à $]0, +\infty[$.
3. On a directement :
$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \ln(1/n) = 1 - \ln(n)$$
et, pour $n \geqslant 3$, on a : $\ln(n) \geqslant \ln(3) > \ln(e) = 1$. Donc pour un tel n : $f_n(n) < 0$.
Et ainsi : $f_n(1/n) < f_n(u_n)$. Par stricte croissance de f_n, on déduit que $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n$ (et même une inégalité stricte).
De même, on a :
$$f_n(1) = n + \ln(1) = n > 0 = f_n(u_n)$$
et par stricte croissance de f_n, on a bien $u_n \leqslant 1$ (et c'est même une inégalité stricte).
4. Soit $n \geqslant 1$. On a par définition : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire : $(n+1)u_{n+1} + \ln(u_{n+1}) = 0$. Et ainsi :
$$f_n(u_{n+1}) = nu_{n+1} + \ln(u_{n+1}) = -u_{n+1} < 0$$
et ainsi : $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$. Par stricte croissance de f_n, on déduit que $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est donc (strictement) décroissante.
5. La suite (u_n) est donc décroissance minorée (par 0) donc converge. Sa limite ℓ vérifie $\ell \geqslant 0$.
6. Par l'absurde, supposons que $\ell > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$nu_n + \ln(u_n) = 0$$
mais par passage à la limite :
   — comme $\ell > 0$: $\lim nu_n = +\infty$ par produit ;
   — par continuité de ln : $\lim \ln(u_n) = \ln(\ell)$.

   Et donc $+\infty = 0$, d'où la contradiction.
   Et donc $\ell \leqslant 0$.
   Comme on a déjà montré que $\ell \geqslant 0$, on déduit que $\ell = 0$.
7. (a) Par définition, pour tout $n \geqslant 1$ on a : $nu_n = -\ln(u_n)$ et cette quantité étant strictement positive, on peut appliquer la fonction ln ce qui donne bien : $\ln(n) + \ln(u_n) = \ln(-\ln(u_n))$.
   (b) Divisons cette égalité par $\ln(u_n) \neq 0$. On a alors pour tout $n \geqslant 1$:
$$\frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(n) + \ln(u_n)}{\ln(u_n)} - 1 = \frac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)} - 1$$
   Mais on a vu que u_n tend vers 0^+. Donc $\ln(u_n)$ tend vers $-\infty$. Et ainsi par composition :
$$\lim \frac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{-x} = 0 \text{ par croissanceS comparéeS}$$
   Ce qui donne bien la limite voulue, par somme.
   (c) On déduit ainsi que $\ln(u_n) \sim -\ln(n)$ (le quotient tend bien vers 1).
   (d) Et en utilisant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $nu_n = -\ln(u_n)$, on a finalement :
$$u_n = -\frac{\ln(u_n)}{n} \sim \frac{\ln(n)}{n}$$
   qui tend bien vers 0 par valeurs positives, comme prouvé précédemment.

II Problème

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. L'objectif est de calculer, par différentes manières, les puissances de M.

II.1 Première méthode

Considérons la matrice A définie par : $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

1. On a directement :
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A$$
2. On traite séparément les trois cas :
   — pour $n = 0$: $M^0 = I_3 = I_3 + 0 \cdot A$ donc $u_0 = 0$ convient ;
   — pour $n = 1$: $M^1 = M = I_3 + 4 \cdot A$ donc $u_1 = 4$ convient ;
   — pour $n = 2$: $M^2 = (I_3 + 4A)^2 = I_3 + 16A^2 + 8A = I_3 - 8A$ (en utilisant le binôme, comme I_3 et A commutent, et que $A^2 = -A$) ; donc $u_2 = -8$ convient.
3. Procédons par récurrence :
   — initialisation : le résultat a été montré pour $n = 0, 1, 2$;
   — hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \in \mathbb{R}$ tels que $M^n = I_3 + u_n A$. Alors :
$$M^{n+1} = M \cdot M^n = (I_3 + 4A)(I_3 + u_n A) = I_3 + 4u_n A^2 + (4 + u_n)A = I_3 + \underbrace{(4 - 3u_n)}_{=u_{n+1}} A$$
   en utilisant à nouveau que $A^2 = -A$. Donc $u_{n+1} = 4 - 3u_n$ convient, et on a bien l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.
4. La famille (I_3, A) étant libre (les deux matrices n'ont pas des 0 au même endroit, donc sont clairement non proportionnelles), on déduit que toute combinaison linéaire en I_3 et A ne possède qu'une unique écriture de cette forme. Ceci assure directement, sous réserve d'existence, l'unicité de u_n.
5. La suite (u_n) vérifie :
$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n + 4$$
   et c'est donc une suite arithmético-géométrique. Pour $l \in \mathbb{R}$, on a :
$$l = -3l + 4 \Leftrightarrow l = 1$$
   ce qui assure que $(v_n) = (u_n - 1)$ est géométrique de raison -3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = -1$, donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -(-3)^n$$
   puis :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -(-3)^n + 1$$
   On vérifie la formule pour $n = 0, 1, 2$: on retrouve bien les valeurs de u_0, u_1, u_2.
6. Et finalement on trouve :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I_3 + u_n A = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^n & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^n \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}.$$
   Et on vérifie : on a les bonnes valeurs pour $n = 0$ et $n = 1$.

II.2 Une deuxième méthode

On pose :

$$J = \frac{1}{4}(M + 3I_3).$$

7. On a directement :

$$J = J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = J$:

— pour $n = 1$: c'est vrai par définition ;

— hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^n = J$. Alors :

$$J^{n+1} = J^n J = J \cdot J = J^2 = J$$

d'où l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Et finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J^n = \begin{cases} I_3 & \text{si} \quad n = 0 \\ J & \text{si} \quad n \geqslant 1 \end{cases}.$$

Et cette formule est cohérente pour $n = 0, 1, 2$.

8. Par définition de J, on a : $M = 4J - 3I_3$. Les matrices $4J$ et $-3I_3$ commutent (cette dernière étant scalaire), on a directement par formule du binôme pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} M^n &= (4J - 3I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k \\ &= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J \\ &= (-3)^n I_3 + \left((4-3)^n - (-3)^n \right) J \\ &= (-3)^n I_3 + \left(1 - (-3)^n \right) J \end{aligned}$$

9. En remplaçant J par sa valeur, on déduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'égalité :

$$M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^n & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^n \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}.$$

et cette formule étant valable aussi pour $n = 0$ (elle donne I_3, qui vaut bien M^0), on a bien la formule demandée.

II.3 Une dernière méthode

Pour cette dernière méthode, on pose :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une dernière méthode de calcul des puissances de M.

10. On procède par pivot. On trouve que P est inversible, avec :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(et on vérifie bien que $PP^{-1} = I_3$).

11. On a directement :

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(qui est diagonale, comme le laissait supposer son nom).

12. En tant que matrice diagonale, on a directement les puissances de D en passant à la puissance ses coefficients diagonaux :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la formule étant même valable pour $n \in \mathbb{Z}$ comme D est inversible, en constatant que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls).

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

en notant que les PP^{-1} qui apparaissent dans la puissance, écrite comme produits successifs, s'éliminent.

Et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^n & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^n \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}$$

II.4 Une belle conclusion

14. Ici, il n'y a rien à faire si on suite la méthode du II.3 : la formule pour D^n étant valable pour $n \in \mathbb{Z}$, la formule finale est valable pour $n \in \mathbb{Z}$. Et cela a bien un sens car, la matrice D est inversible (on l'a dit avant) et :

$$M = PDP^{-1}$$

est un produit de matrices inversible, ce qui prouve l'inversibilité de M.

Autre méthode : soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^n & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^n \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^{-n} & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^{-n} \\ -(-3)^{-n} + 1 & 1 & -(-3)^{-n} + 1 \\ -(-3)^{-n} + 1 & 0 & -(-3)^{-n} + 2 \end{pmatrix} = I_3$$

mais la première matrice est M^n. On déduit donc l'inversibilité de M^n, et plus précisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^{-n} = (M^n)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot (-3)^{-n} & 0 & -2 + 2 \cdot (-3)^{-n} \\ -(-3)^{-n} + 1 & 1 & -(-3)^{-n} + 1 \\ -(-3)^{-n} + 1 & 0 & -(-3)^{-n} + 2 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve bien que la formule précédente est valable aussi pour $n \in \mathbb{Z}$.