DS n^{o}7

I Exercices

Exercice 1 [Familles libres et bases d'espaces vectoriels]

1. Montrer que $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y = z+t = 0\}$ est un espace vectoriel, et en donner une base.
2. Montrer que la famille $(\cos, \sin, \tan)$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$.
3. On considère $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et en donner une base.
4. On considère $G = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, R) \,|\, f'' = 3f' - 2f\}$. Montrer que G est un espace vectoriel et en donner une base.
5. Montrer que l'ensemble $H = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \,|\, f(\pi) = f''(37)\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 2 [Étude d'une suite récurrente]

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

1. Donner les variations de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ et le signe de $(x - \sqrt{x+1})$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}_+$.
3. Déduire des questions précédentes les variations de (u_n), qu'on donnera le plus précisément possible en discutant suivant la valeur de u_0.
4. En déduire le comportement de (u_n) en fonction de u_0.

Exercice 3 [Un étude d'ensemble de matrice]

On considère a, b, c trois réels tels que $b \neq 0$. On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note E l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est-à-dire que $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, MA = AM\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que la famille (A, I) est libre, et que $\mathrm{Vect}(A, I) \subset E$.
3. On pose pour cette question $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in E$.
   (a) Exprimez les matrices AM et MA en fonction de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.
   (b) En déduire que :
   $$\beta + \gamma = 0 \text{ et } a\beta + b\alpha = b\delta + c\beta.$$
   (c) En déduire que : $bM + \beta A \in \mathrm{Vect}(I)$, puis que $M \in \mathrm{Vect}(A, I)$.
4. À l'aide des questions précédentes, montrer que (A, I) est une base de E, et donner les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in E$ dans cette base en fonction de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Exercice 4 [Étude d'une suite implicite] Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $f_n \ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f_n(x) = nx + \ln(x).$$

1. L'entier n étant fixé, étudier rapidement la fonction f_n : variations, limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation "$f_n(x) = 0$" possède une unique solution x appartenant à $]0,+\infty[$.

   Dans toute la suite de l'exercice, on note u_n l'unique solution de l'équation "$f_n(x) = 0$". L'objectif des questions suivantes est d'étudier la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi définie.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$: $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1$.
4. Pour $n \geqslant 1$, déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
6. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\ell \leqslant 0$. En déduire la valeur de ℓ.
7. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $\ln(n) + \ln(u_n) = \ln(-\ln(u_n))$.
   (b) En déduire soigneusement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = -1$.
   (c) En déduire un équivalent simple de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (d) En déduire enfin un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

II Problème

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. L'objectif est de calculer, par différentes manières, les puissances de M.

II.1 Première méthode

Considérons la matrice A définie par : $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

1. Calculer A puis A^2.
2. Montrer que pour tout entier n appartenant à $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_n tel que : $M^n = I_3 + u_n A$. On donnera explicitement les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
3. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que : $M^n = I_3 + u_n A$. On ne cherchera pas ici à expliciter les réels u_n, mais on montrera qu'ils vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n + 4$.
4. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, le réel u_n est unique.
5. Déterminer explicitement u_n pour tout entier naturel n.
6. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

II.2 Une deuxième méthode

On pose :

$$J = \frac{1}{4}(M + 3I_3).$$

7. Calculer J^2, et en déduire l'expression de J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On vérifiera bien la formule obtenue pour $n = 0, 1, 2$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une expression de M^n en fonction de n, I_3 et J.
9. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

II.3 Une dernière méthode

Pour cette dernière méthode, on pose :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une dernière méthode de calcul des puissances de M.

10. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}. Le calcul de P^{-1} étant utile pour la suite, on vérifiera bien les calculs.
11. On pose $D = P^{-1}MP$. Expliciter D.
12. Calculer les puissances de D.
13. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

II.4 Une belle conclusion

14. À l'aide d'une des formules trouvées ci-dessus, déduire une expression simple de M^n pour $n \in \mathbb{Z}$. On justifiera dans un premier temps, par une méthode de son choix, que cette expression a bien un sens.