DS n^{o}6

I Limites, équivalents et suites

Exercice 1 Donner un équivalent et la limite éventuelle des fonctions suivantes en les points considérés :

1. en 0 :
   (a) $\dfrac{x^2\cos(x)}{\tan(x)+\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\to} 0$
   (b) $\dfrac{\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2x^2} \underset{x\to 0}{\to} +\infty$
   (c) $(2x^2+5x+3)\ln(2+x) \underset{x\to 0}{\sim} 3\ln(2) \underset{x\to 0}{\to} 3\ln(2)$
   (d) $x\cos(x)+\tan(x)\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\to} 0$
   (e) $\dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ qui n'a pas de limite en 0 (tend vers $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en 0^-) ;
2. en 3 :
   (a) $(x+5)\ln(1+x^3) \underset{x\to 3}{\sim} 8\ln(28) \underset{x\to 3}{\to} 8\ln(28)$
   (b) $\sqrt{x}-\sqrt{2} \underset{x\to 3}{\sim} \sqrt{3}-\sqrt{2} \underset{x\to 3}{\to} \sqrt{3}-\sqrt{2}$
   (c) on pose $x=3+h$: $\sqrt{x}-\sqrt{3}=\sqrt{3+h}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\sqrt{1+(h/3)}-1\right) \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{3}\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{3} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{3}}{6}h \underset{x\to 3}{\sim} \dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-3) \underset{x\to 3}{\to} 0$
   (d) pareil : $\dfrac{e^x-e^3}{x^2-9}=\dfrac{e^{3+h}-e^3}{6h+h^2}=\dfrac{e^3\left(e^h-1\right)}{6h+h^2} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{e^3h}{6h} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{e^3}{6} \underset{x\to 3}{\sim} \dfrac{e^3}{6} \underset{x\to 3}{\to} \dfrac{e^3}{6}$
   (e) pareil : $(x^2-9)\ln(x^2-8)=(6h+h^2)\ln(1+6h+h^2) \underset{h\to 0}{\sim} 6h\cdot 6h \underset{h\to 0}{\sim} 36h^2 \underset{x\to 3}{\sim} 36(x-3)^2$
3. en $+\infty$:
   (a) $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \underset{x\to+\infty}{\to} 1$
   (b) $\dfrac{e^x+\ln(x)-4}{x^2+\ln(x)-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$
   (c) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{2x}-1+\dfrac{1}{2x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$
   (d) $\dfrac{\ln(x^4+1)}{x^2+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{4\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$
   (e) $\dfrac{xe^x+x^5\ln(x)-e^x\ln(x)}{x^3+\ln(x)e^x-\sqrt{x}\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{xe^x}{\ln(x)e^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$

Exercice 2 Donner l'expression explicite de u_n pour les suites arithmético-géométriques (u_n) données par les premières valeurs et les relations de récurrences suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 4$: formule vérifiée pour $u_1 = \frac{11}{2} = \frac{3}{2} + 4$;
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3$: formule vérifiée pour $u_1 = 3$;
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 37 - 8$: formule vérifiée pour $u_1 = 5/4 = 37/4 - 8$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4n + 2$: formule vérifiée pour $u_1 = 6 = 4 \cdot 1 + 2$.

Exercice 3
1. $u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot (-3)^n$: formule vérifiée pour $u_2 = 75 = 3 \cdot 4 + 7 \cdot 9$
2. $u_n = (3 + 7n) \cdot (-2)^n$: formule vérifiée pour $u_2 = 68 = (3 + 14) \cdot 4$
3. $u_n = 2^n \cos(n\pi/3) - 2^n \sin(n\pi/3)$: formule vérifiée pour $u_2 = -2 - 2\sqrt{3}$.

II Matrices

Exercice 4

Pour chacune des matrices $A_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes, calculer A_i^2, puis calculer A_i^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On vérifiera bien que la formule donnée pour $k \in \mathbb{N}$ est valable pour $k = 0, 1, 2$:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $A_1^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Puissances par binômes en écrivant $A_1 = 2I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$ qui commutent (matrice scalaire) avec $N^2 = 0$ donc N nilpotente et toutes puissances $N^k = 0$ pour $k \geqslant 2$. Et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_1^n = (2I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = 2^n I_2 + n2^{n-1} N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Formule juste pour $n = 0, 1, 2$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Puissances par binômes en écrivant $A_2 = I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B}$ qui commutent (matrice scalaire) avec $B^2 = B$ toutes puissances $B^k = B$ pour $k \geqslant 1$. Et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_2^n = (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_2 + (2^n - 1)B = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Formule juste pour $n = 0, 1, 2$.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $A_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot A_3$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A_3^n = 2^{n-1} A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$:
   - pour $n = 1$: $A_3^1 = A_3 = 2^0 A_3$ donc le résultat est vrai pour $n = 1$;
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_3^n = 2^{n-1} A_3$. Alors :

$$A_3^{n+1} = A_3^n \cdot A_3 = 2^{n-1} A_3 \cdot A_3 = 2^{n-1} A_3^2 = 2^n A_3 = 2^{(n+1)-1} A_3.$$

D'où le résultat par récurrence.
Formule juste pour $n = 1, 2$.
Et pour $n = 0$: $A_3^0 = I_2$.

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $A_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puissances par binômes en écrivant $A_4 = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$ qui commutent (matrice scalaire) avec $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ donc N nilpotente et toutes puissances $N^k = 0$ pour $k \geqslant 3$. Et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_4^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = I_3 + nN \frac{n(n-1)}{2} N = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formule juste pour $n = 0, 1, 2$.

5. $A_5 = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$: $A_5^2 = \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} = 3A_5$. Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_5^n = 3^{n-1}A_5 = \begin{pmatrix}3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\end{pmatrix}$:
   - pour $n=1$: c'est vrai ;
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_5^n = 3^{n-1}A_5$. Alors :

     $$A_5^{n+1} = A_5^n A_5 = 3^{n-1}A_5^2 = 3^n A_5 = 3^{(n+1)-1}A_5$$

     ce qui prouve l'hérédité.

   D'où le résultat par récurrence.

   Formule juste pour $n = 1, 2$.

   Et pour $n = 0$: $A_5^0 = I_3$.

Exercice 5

On procède à chaque fois par opérations sur les lignes : où bien on transforme P_i en I_3 (et elle est inversible et on a son inverse), ou on fait apparaître une ligne de 0 dans P_i : la ligne correspondante sur les transformations de I_3 donne un X (vecteur ligne) non nul tel que $XP = 0$. Ou parfois on voit les choses (mais c'est rare...).

1. $P_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ inversible d'inverse $\begin{pmatrix}1&-21&\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$. On vérifie que le produit donne I_3 ce qui permet de vérifier les calculs, et prouve encore l'inversibilité.
2. $P_2 = \begin{pmatrix}3&1&4\\5&3&2\\3&1&4\end{pmatrix}$: pas inversible (deux lignes égales). On a $L1 + L3 = 0$ donc $\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix} \cdot P_2 = \begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$ ce qui vérifie la non inversibilité.
3. $P_3 = \begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ inversible d'inverse $\begin{pmatrix}-1&1&0\\-3&0&2\\2&0&-1\end{pmatrix}$. On vérifie que le produit donne I_3 ce qui permet de vérifier les calculs, et prouve encore l'inversibilité.
4. $P_4 = \begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}$: pas inversible (deux lignes proportionnelles). On a : $2L1 - L3 = 0$ donc $\begin{pmatrix}2&0&-1\end{pmatrix} \cdot P_4 = \begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$ ce qui vérifie la non inversibilité.
5. $P_5 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$ inversible d'inverse $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}-3&4&1\\4&-8&4\\1&4&-3\end{pmatrix}$. On vérifie que le produit donne I_3 ce qui permet de vérifier les calculs, et prouve encore l'inversibilité.
6. $P_6 = \begin{pmatrix}1&3&5\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$: pas inversible par opérations sur les lignes (là ça ne se voit pas tellement) ; on trouve $\begin{pmatrix}3&-3&1\end{pmatrix} \cdot P_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$ ce qui vérifie la non inversibilité.