DS n^{o}5

I Exercices

Exercice 1 Donner un équivalente et la limite des suites suivantes :

1. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$: on se ramène en 1 en divisant par n dans les racines :
$$\sqrt{n+1}=\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+\mathrm{o}(1/n)\right)=\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\mathrm{o}(1/\sqrt{n})$$
et de même :
$$\sqrt{n-1}=\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}(1/n)\right)=\sqrt{n}-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\mathrm{o}(1/\sqrt{n})$$
et par somme :
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}-\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\mathrm{o}(1/\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n}}+\mathrm{o}(1/\sqrt{n})\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$$
et par quotient : $\lim\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=0$.
2. $(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$: en reconnaissant un polynôme : $n^2+1\sim n^2$ et par composition $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$. Par produit, il vient :
$$(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{n^2}{\sqrt{n}}\sim n^{3/2}$$
et directement : $\lim(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$
3. $\frac{n^2+5n-2}{3n^3+2n-3}$ pour $n\to+\infty$: on un quotient de polynômes, dont on détermine directement un équivalent du numérateur et du dénominateur :
$$\frac{n^2+5n-2}{3n^3+2n-3}\sim\frac{n^2}{3n^3}\sim\frac{1}{3n}$$
et ainsi : $\lim\frac{n^2+5n-2}{3n^3+2n-3}=0$
4. $\frac{e^{1/n}-1}{\ln(1+e^{-n})}$: on utilise les équivalents en 0 de e^u-1 et $\ln(1+u)$, qui donnent ici :
$$\frac{e^{1/n}-1}{\ln(1+e^{-n})}\sim\frac{\frac{1}{n}}{e^{-n}}\sim\frac{e^n}{n}$$
et donc par croissances comparées : $\lim\frac{e^{1/n}-1}{\ln(1+e^{-n})}=+\infty$.

Exercice 2 La fonction f est définie sur $E = \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$ (on souhaite que le dénominateur ne s'annule pas).

Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons sur E :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x-5}{2x-3} = y \\ &\Leftrightarrow x - 5 = y(2x-3) \text{ car } 2x - 3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 3y - 5 = x(2y-1) \end{aligned}$$

et on a deux cas :

— si $y = 1/2$: l'équation devient $-7/2 = 0$, qui n'a pas de solution ; donc $y = 1/2$ n'a pas d'antécédent par F ;

— sinon :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{3y-5}{2y-1}$$

et donc l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution (à savoir $\frac{3y-5}{2y-1}$), c'est-à-dire que y possède un unique antécédent.

Ainsi $E = \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$ et $F = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ conviennent. Et alors :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & \dfrac{3y-5}{2y-1} \end{array} \right. .$$

Exercice 3 On procède par double implication :

— si $B = C$: alors directement $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$;

— si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$: du fait des rôles symétriques de B et C, il suffit de montrer que $B \subset C$ pour avoir $C \subset B$, et donc $B = C$.

  Montrons donc que $B \subset C$.

  Soit $x \in B$. Alors :

  — si $x \in A$: alors $x \in B$ et $x \in A$.
    Donc $x \in A \cap B = A \cap C$.
    Donc $x \in A$ et $x \in C$.
    Donc $x \in C$.

  — sinon : alors $x \notin A$.
    Mais $x \in B$ donc $x \in A \cup B = A \cup C$.
    Donc $x \in A$ ou $x \in C$.
    Mais $x \notin A$.
    Donc $x \in C$.

  Dans les deux cas : $x \in C$.
  Donc $B \subset C$.

D'où l'équivalence.

Exercice 4 On considère E, F, G, H quatre ensembles (supposés non vides), et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective.

(a) L'application f est injective. Montrons le.
Soient $x_1, x_2 \in E$. Supposons $f(x_1) = f(x_2)$.
Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Mais par injectivité de $g \circ f$: $x_1 = x_2$.
Donc f est injective.

(b) Prenons par exemple :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right. \text{ et } g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. .$$

Alors $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ est injective, mais pas g (on a par exemple $g(1) = 1 = g(-1)$).

2. On suppose que $g \circ f$ est surjective.
   (a) L'application g est surjective. Montrons le.
   Soit $z \in G$.
   Par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$.
   Et alors en posant $y = f(x) \in F$, on a : $z = g(y)$.
   Donc g est surjective.

   (b) Reprenons l'exemple précédent :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right. \text{ et } g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. .$$

   Alors $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ est surjective, mais pas f (par exemple -1 n'a pas d'antécédent, comme une racine carrée est toujours positive ou nulle).

3. (a) Soient $x_1, x_2 \in E$. Supposons que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
   Par injectivité de g : $f(x_1) = f(x_2)$.
   Et par injectivité de f : $x_1 = x_2$.
   D'où l'injectivité de $g \circ f$.

   (b) Soit $z \in G$.
   Par surjectivité de g : il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
   Par surjectivité de f : il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Un tel x vérifie donc $g \circ f(x) = g(y) = z$.
   D'où la surjectivité de $g \circ f$.

   (c) Les deux points précédents donnent que, si f et g sont bijectives, elles sont injectives et surjectives, donc $g \circ f$ aussi, qui est donc bijective.

4. On procède par double implication :
   — si f, g, h sont bijectives : en tant que composées d'applications bijectives, $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives ;
   — si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives :
     — par injectivité de $h \circ g$: g est injective ;
     — par surjectivité de $g \circ f$: g est surjective.

   Donc g est bijective, tout comme sa bijection réciproque g^{-1}. Et ainsi :
     — $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est la composée d'applications bijectives, donc est bijective ;
     — $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est la composée d'applications bijectives, donc est bijective.

   Ce qui conclut la réciproque.

   D'où l'équivalence demandée.

   À l'aide des questions précédentes, montrer que l'on a l'équivalence :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f, g, h \text{ sont bijectives}) .$$

Exercice 5 On considère $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et on pose $a \notin \mathbb{U}$. On pose :

$$f : z \mapsto \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

1. La fonction f est définie en tout complexe z tel que $1 + \overline{a}z = 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{C} \setminus \{-1/\overline{a}\}$.
   Comme $a \notin \mathbb{U}$, alors $|a| = |\overline{a}| \neq 1$, donc $\left|\frac{-1}{\overline{a}}\right| \neq 1$, c'est-à-dire que $\frac{-1}{\overline{a}} \notin \mathbb{U}$, donc f est bien définie sur $\mathbb{U}$.
2. (a) Pour $z \in \mathbb{U}$, on a : $|z|^2 = z\overline{z} = 1$. Et ainsi : $\frac{1}{z} = \overline{z}$.
   (b) On déduit que :
   $$|1+\overline{a}z| = \left|z\left(\frac{1}{z}+\overline{a}\right)\right| = |z| \cdot |\overline{z}+\overline{a}| = 1 \cdot |z+a| = |z+a|$$
   et en réinjectant dans l'expression de $f(z)$: $|f(z)| = 1$.
   Ce qui prouve bien que $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. (a) On a directement :
   $$f(z) = \omega \Leftrightarrow \frac{z+a}{1+\overline{a}z} = \omega \Leftrightarrow z(1-\overline{a}\omega) = \omega - a \Leftrightarrow z = \frac{\omega - a}{1-\overline{a}\omega}.$$
   où la dernière équivalence vient du fait que $1 - \overline{a}\omega \neq 0$ comme $\omega \in \mathbb{U}$ et $\overline{a} \notin \mathbb{U}$.
   (b) On reconnaît la même expression que $f(z)$, en changeant a en $-a$ et z en ω (qui vérifient les mêmes conditions qu'en question 1) : les mêmes calculs donnent la même conclusion, à savoir que $\frac{\omega - a}{1-\overline{a}\omega} \in \mathbb{U}$.
4. On a donc montré :
   — en question 2 que l'on peut considérer $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$;
   — en question 3 que tout $\omega \in \mathbb{U}$ possède un unique antécédent par f, et que celui est l'élément $\frac{\omega - a}{1-\overline{a}\omega} \in \mathbb{U}$.

   Et ainsi, f réalise bien une bijection de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$, de réciproque :
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \to & \mathbb{U} \\ \omega & \mapsto & \frac{\omega - a}{1-\overline{a}\omega} \end{array} \right. .$$

Exercice 6 Soient E, F deux ensembles non-vides, et $f : E \to F$.

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   Soit $x \in A$.
   Alors $f(x) \in f(A)$ (par définition).
   Donc $x \in f^{-1}(f(A))$ (par définition).
   D'où l'inclusion demandée.
2. Prenons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors avec $A = \mathbb{R}_+$ on a : $f(A) = f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, puis $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$. Donc $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$ dans ce cas.
3. On procède par double implication :

— si f est injective :
Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Soit $x \in f^{-1}(f(A))$.
Alors $f(x) \in f(A)$.
Donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$.
Par injectivité de f, on a : $x = x'$. Donc $x \in A$.
Donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

— si pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$:
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Posons $A = \{x_1\}$.
Alors $f(A) = \{f(x_1)\}$.
Mais $f(x_2) = f(x_1) \in f(A)$.
Donc par définition : $x_2 \in f^{-1}(f(A))$.
Par l'inclusion supposée : $x_2 \in A = \{x_1\}$.
Donc $x_2 = x_2$.
D'où l'injectivité de f.

D'où le résultat par double implication.

II Problème

II.1 Analyse asymptotique des solutions d'une équation différentielle à coefficients constants

1. On a une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de polynôme caractéristique $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. L'ensemble des solutions réelles est donc :
$$\{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$
2. Procédons par disjonction de cas :
   — si $A \neq 0$: alors par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to 0} A\cos(x) + B\sin(x) = A \neq 0$. Donc :
$$A\cos(x) + B\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} A.$$
   — sinon : par équivalent classique : $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et donc :
$$A\cos(x) + B\sin(x) = B\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} Bx$$

   Remarque : si de plus $B = 0$, on cherche un équivalent de la fonction nulle, donc il est normal de trouver un équivalent à 0.
3. Raisonnons à nouveau par disjonction de cas :
   — si $A \neq 0$: alors :
$$\frac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{A}{\sqrt{x}}$$
   qui tend vers $\pm\infty$ par quotient (selon le signe de A), et n'a donc pas de limite finie en 0^+ ;
   — si $A = 0$: alors :
$$\frac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{Bx}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} B\sqrt{x}$$
   qui tend vers 0 en 0.

   La condition est donc $A = 0$, et on a alors comme équivalent en 0^+ : $B\sqrt{x}$.

II.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients variables

On considère dans cette question l'équation différentielle :

$$(E): \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

4. On a une équation différentielle linéaire homogène. L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc non vide car il contient la fonction nulle.
   Si $f, g \in \mathcal{S}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors par linéarité la fonction $h = \lambda f + \mu g$ est deux fois dérivable avec :

   $$h' = \lambda f' + \mu g' \text{ et } h'' = \lambda f'' + \mu g''$$

   et ainsi pour tout $x \in]0; +\infty[$:

   $$\begin{aligned} & x^2h''(x) + xh'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)h(x) \\ = \; & x^2(\lambda f''(x) + \mu g''(x)) + x(\lambda f'(x) + \mu g'(x)) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(\lambda f(x) + \mu g(x)) \\ = \; & \lambda\left(x^2f''(x) + xf'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)f(x)\right) + \mu\left(x^2g''(x) + xg'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)g(x)\right) \\ = \; & \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

   donc $h \in \mathcal{S}$. Et ainsi $\mathcal{S}$ est bien stable par combinaisons linéaires.

5. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie par :

   $$z: \begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{1/2}y(x) \end{array}$$

   (a) Les fonctions y et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$. Par produit, z est donc de classe $\mathcal{C}^2$. Et on a :

   $$z' : x \mapsto \sqrt{x} \cdot y'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) = \frac{2x \cdot y'(x) + y(x)}{2\sqrt{x}}.$$

   et :

   $$z'' : x \mapsto \sqrt{x}y''(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}y'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}y'(x) - \frac{1}{4x\sqrt{x}}y(x) = \frac{4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y(x)}{4x\sqrt{x}}$$

   (b) On procède par double implication :

   — si y est solution de (E) : alors $4x^2yy + 4xy' - y = -4x^2y$. Et en réinjectant dans l'écriture de z'' on déduit que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; z''(x) = \frac{-4x^2y(x)}{4x\sqrt{x}} = -\sqrt{x}y(x) = -z(x)$$

   et ainsi z est solution de l'équation $z'' + z = 0$.

   — si z est solution de l'équation $z'' + z = 0$: alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

   $$0 = z''(x) + z(x) = \frac{4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y(x)}{4x\sqrt{x}} + \sqrt{x}y(x) = \frac{x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 1/4)y(x)}{x\sqrt{x}}$$

   et ainsi : $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 1/4)y(x)$.
   Donc y est solution de (E).

Ce qui prouve bien l'équivalence, avec :

$$(E') : z'' + z = 0.$$

6. On a résolu (E') en première partie. Ses solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x),\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

7. On déduire que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

dont on a vu qu'elles tendent vers une limite finie en 0 si, et seulement si, $A = 0$. Et ainsi :

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \frac{B\sin(x)}{\sqrt{x}} \mid B \in \mathbb{R}\} = \{\lambda f_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

où $f_0 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.

8. Par construction, les éléments de $\mathcal{S}_0$ sont tous prolongeables par continuité en 0, comme ils tendent tous vers une limite finie (à savoir 0 en 0).

Étudions la dérivabilité d'un tel prolongement. Considérons $f \in \mathcal{S}_0$. On pose $f : x \mapsto \lambda \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Et on prolonge f en 0 en posant $f(0) = 0$. On a alors pour tout $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lambda \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$$

et on a donc deux cas :

- si $\lambda = 0$: alors $f = 0$ et le prolongement est bien dérivable (de dérivée nulle) en 0 ;
- sinon : le taux d'accroissement calculé n'a pas de limite finie en 0 (il tend vers $\pm\infty$ suivant le signe de λ). Donc le prolongement n'est pas dérivable.

Et donc la fonction nulle est l'unique élément de $\mathcal{S}_0$ dont le prolongement par continuité en 0 est dérivable.

9. Considérons $f \in \mathcal{S}$. Procédons par analyse-synthèse.

Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}$, alors f a pour limite 0 en 0, donc $f \in \mathcal{S}_0$.
Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_0$. Posons $f = \lambda f_0$. Alors :

$$f(x) = \lambda \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\lambda} \sqrt{x}$$

et ainsi :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \Leftrightarrow \lambda\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \Leftrightarrow \lambda \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Et ainsi il existe une unique fonction f solution de (E) qui vérifie cette condition, à savoir :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}.$$