

DS n°5

I Exercices

Exercice 1 Donner un équivalente et la limite des suites suivantes :

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2. $(n^2 + 1)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
3. $\frac{n^2 + 5n - 2}{3n^3 + 2n - 3}$
4. $\frac{e^{1/n} - 1}{\ln(1 + e^{-n})}$

Exercice 2 On considère l'application :

$$f : x \mapsto \frac{x - 5}{2x - 3}.$$

Donner des sous-ensembles E, F de \mathbb{R} les plus grands possibles tels que f réalise une bijection de E dans F , et donner sa bijection réciproque.

Exercice 3 Soient E un ensemble non vide, et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C.$$

Exercice 4 On considère E, F, G, H quatre ensembles (supposés non vides), et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective.
 - (a) Quelle application, de f ou de g , est alors injective ?
 - (b) Montrer que l'autre application n'est pas nécessairement injective.
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective.
 - (a) Quelle application, de f ou de g , est alors surjective ?
 - (b) Montrer que l'autre application n'est pas nécessairement surjective.
3.
 - (a) Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.
 - (b) Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.
 - (c) Montrer que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi.
4. À l'aide des questions précédentes, montrer que l'on a l'équivalence :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f, g, h \text{ sont bijectives}).$$

Exercice 5 On considère $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et on pose $a \notin \mathbb{U}$. On pose :

$$f : z \mapsto \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f , et vérifier que f est bien définie sur \mathbb{U} .
2. Soit $z \in \mathbb{U}$.
 - (a) Exprimez le plus simplement possible $\frac{1}{z}$ en fonction de \bar{z} .
 - (b) En déduire que $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. Soit $\omega \in \mathbb{U}$.
 - (a) Résoudre l'équation $f(z) = \omega$.
 - (b) Montrer que $\frac{\omega - a}{1 - \bar{a}\omega} \in \mathbb{U}$.
4. En déduire que f réalise une bijection de \mathbb{U} sur \mathbb{U} , et donner sa bijection réciproque.

Exercice 6 Soient E, F deux ensembles non-vides, et $f : E \rightarrow F$.

1. Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A)).$$

2. Montrer que, dans l'assertion précédente, l'inclusion réciproque n'est en général pas vérifiée.
3. Montrer que f est injective si, et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) \subset A.$$

II Problème

II.1 Analyse asymptotique des solutions d'une équation différentielle à coefficients constants

1. Déterminer les solutions réelles définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $z'' + z = 0$.
2. Pour deux réels A et B , déterminer un équivalent en 0 de la fonction $x \mapsto A \cos x + B \sin x$.
Indication : on pourrait traiter séparément les cas où $A = 0$ et $A \neq 0$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la fonction

$$x \mapsto \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$$

admette une limite finie en 0^+ . Cette condition étant satisfaite, en donner un équivalent en 0^+ .

II.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients variables

On considère dans cette question l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (E) .

4. Montrer que \mathcal{S} est non-vide, et stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire que :

$$\forall f, g \in \mathcal{S}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}.$$

5. Soit y une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie par :

$$z : \begin{array}{l}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \cdot y(x) \end{array}$$

- (a) Justifier que z est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$, et exprimer z' et z'' à l'aide de y et de ses dérivées.
 - (b) En déduire que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire (E') du second ordre **à coefficients constants**, que l'on donnera explicitement.
6. Résoudre l'équation différentielle (E') sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et en déduire les solutions de (E) .
 7. Déterminer l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de (E) qui possèdent une limite finie en 0. On écrira \mathcal{S}_0 sous la forme $\{\lambda f_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ pour f_0 une fonction que l'on donnera explicitement.
 8. Les éléments de \mathcal{S}_0 sont-ils prolongeables par continuité en 0 ? Les prolongements éventuels sont-ils dérivables en 0 ?
 9. Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$, notée f , telle que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$$