DS n^{o}3 : erreurs

I Erreurs générales

1. Les questions sont mal lues : si une question est du type “montrer que l’objet x vérifie la propriété A”, la réponse doit se terminer par ”l’objet x vérifie la propriété A”. Beaucoup ne répondent pas à la question en donnant d’autres formulations qui parfois n’ont pas de sens, et parfois n’ont pas le même sens.
2. Pour montrer un résultat, certains partent du résultat et arrivent à quelque chose de vrai. Et en concluent que le résultat de départ était vrai. Cela n’a aucun sens. Pour vous en convaincre, voici une preuve que $\pi = \sqrt{2}$: on a $\pi = \sqrt{2}$. Donc en multipliant par 0 : $0 = 0$. Ce qui est vrai. Donc $\pi = \sqrt{2}$.
3. Encore des variables qui apparaissent ou disparaissent miraculeusement : des phrases comme ”$\sin \geqslant 0$ pour tout $x \in [0;\pi]$” n’ont aucun sens. On devrait écrire à la place ”$\sin(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0;\pi]$” ou bien ”$\sin \geqslant 0$ sur $[0;\pi]$”, mais on ne peut pas avoir x d’un côté de l’assertion et pas de l’autre.
4. Calculs de limites pas clairs : il faut bien faire apparaître les calculs et les résultats utilisés. Certains utilisent des théorèmes d’encadrement sans vérifier que les deux membres extrêmes tendent vers la même limite finie (indispensable). Aussi, beaucoup écrivent $\lim\limits_{x\to\ldots} \ldots$ avant même d’avoir montré l’existence de la limite considérée : on ne peut pas manipuler une limite avant d’avoir montré son existence !
5. Beaucoup écrivent des équivalences au lieu des donc, ce qui change le sens. Si l’énoncé vous demande de montrer une assertion B, on ne répond pas à la question en montrant que $A \Leftrightarrow B$ (pour une autre assertion A). Prenons par exemple la question 1 de l’exercice 2 : on veut montrer que $AB = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} + \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$. En posant C le point du couloir, qui est un point de $[AB]$, on a : $AC + CB = AB$. Et on pourrait écrire :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \sin(\alpha) & = & \dfrac{3\sqrt{3}}{AC} \\ \cos(\alpha) & = & \dfrac{1}{CB} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} AC & = & \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} \\ CB & = & \dfrac{1}{\cos(\alpha)} \end{array}\right. \Leftrightarrow AB = AC + CB = \frac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}$$
où la dernière équivalence est fausse (déjà un problème) et surtout cela ne prouve rien. Par exemple, on a aussi les implications (toutes vraies) :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \sin(\alpha) & = & \dfrac{1}{AC} \\ \cos(\alpha) & = & \dfrac{1}{CB} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} AC & = & \dfrac{1}{\sin(\alpha)} \\ CB & = & \dfrac{1}{\cos(\alpha)} \end{array}\right. \Rightarrow AB = AC + CB = \frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}$$
On préfère donc reprendre les premières équivalences (à remplacer par des donc) et ainsi répondre à la question.
6. En lien avec les implications/équivalences : l’implication $A \Rightarrow B$ ne peut que servir à montrer que A est fausse (si l’on montre que B est fausse) ou que B est vraie (si l’on montre que A est vraie). En particulier, si on veut montrer une assertion A et que l’on a $A \Rightarrow B$, on ne peut pas conclure que A est vraie en utilisant que B est vraie !
7. Les croissances comparées servent à comparer les croissances des fonctions usuelles (polynômes, exponentielles et logarithmes). Il y a plusieurs croissances qu’on compare : il faut utiliser le pluriel !
8. Quand on compose, ou que l’on fait une combinaison linéaire, un produit ou un quotient, il y a plusieurs fonctions en jeu : on doit donc mettre un pluriel ! Et il faut systématiquement préciser que le dénominateur ne s’annule pas quand on travaille avec un quotient.

9. Si la fonction f a même signe que la fonction g, on écrit "le signe de $f(x)$ est celui de $g(x)$" et pas "le signe de $f(x)$ dépend du signe de $g(x)$" est vague, et souvent ne répond même pas à la question. C'est inadmissible pour des questions comme la question 3) de l'exercice 2 où il suffisait de recopier l'énoncé pour formuler correctement la réponse.
10. On définit les objets proprement : s'il y a plusieurs objets qui conviendraient, on dit bien qu'on en prend un qui vérifie la condition ; s'il y a unicité, on explique pourquoi ; et s'il peut être donné explicitement on le donne explicitement. Aussi, cela n'a pas de sens de définir l'image d'un objet : par exemple, si on veut manipuler un objet dont le carré vaut 37, on pose "soit $x = \sqrt{37}$" ou "soit $x = -\sqrt{37}$" (ou encore, mais c'est moins bien car non explicite, "soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 37$, qui existe bien comme l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction carrée est $\mathbb{R}_+$ et $37 \in \mathbb{R}_+$"). Et on n'écrit pas "soit $x^2 = 37$" (qui n'a pas de sens). De manière plus subtile, on ne définit pas une dérivée : on ne peut pas écrire "soit $f' : x \mapsto \dots$" : on définit f (éventuellement comme une primitive de $x \mapsto \dots$), puis on peut ensuite manipuler f' (après avoir justifié la dérivabilité de f bien évidemment).
11. Quand on s'intéresse à la bijection réciproque d'une fonction, il y a deux manières de voir les choses : ou bien on ne demande pas d'exprimer la bijection réciproque, et on veut seulement son existence, alors on essaye si possible de travailler avec le théorème de la bijection monotone (comme en question 2 du problème) ; ou bien on demande explicitement la bijection réciproque, auquel cas on cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$ (comme en question 5 du problème).
12. Résoudre une équation, c'est donner son ensemble solution, et cela se fait par équivalences. Et donc :
    - si on raisonne avec des implications : on privilégie une rédaction type "analyse–synthèse", et on commence donc par "soit z solution ..." ; et on n'oublie pas de conclure avec les réciproques (la synthèse) pour vérifier que tous les candidats trouvés sont bien solution ;
    - on conclut par "donc $S = \dots$" en donnant l'ensemble solution, et pas par "donc $z = \dots$" (avec z l'inconnue), ce qui n'a pas du tout le même sens, et ne répond pas à la question.

    Et surtout, ON NE PART PAS DE L'ÉQUATION EN METTANT DES DONC POUR LA RÉSOUDRE !!! Cela n'a absolument aucun sens. Si on veut faire avec des donc, on fait par analyse–synthèse, et la partie analyse commence par "soit x solution". On ne peut en aucun cas écrire quelque chose comme : "pour tout $\alpha \in]0; \pi/2[$, $\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha) = 0$ donc $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ donc $\alpha = \pi/3$", qui sous-entendrait que tout élément de $]0; \pi/2[$ vaut $\pi/3$ (ce qui est notoirement faux).
13. Attention au sens qu'a une fonction : quand on pose $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, si on veut calculer la dérivée comme une composée, il ne faut pas confondre $f'(x)$ (qui est la dérivée de f en x, qui vaut $\frac{1}{1+x^2}$ après calculs et simplifications) et $\operatorname{Arcsin}'\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ (qui est la dérivée de Arcsin évaluée en $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, qui vaut donc $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \sqrt{1+x^2}$ après simplification). Et plus généralement, cela n'a pas de sens de mettre des prime partout pour dire qu'on fait des dérivées. Pour faire les choses proprement, soit on nomme systématiquement une fonction quand on veut la dériver ; soit on ne nomme pas mais on travaille toujours avec des fonctions (donc on doit écrire systématiquement des $x \mapsto \dots$ donc c'est un peu lourd) ; soit on peut écrire des $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ un peu partout comme dans le corrigé. Mais on évite de rendre des écritures fausses par des raccourcis maladroits. Et ces raccourcis font parfois faire des erreurs : certains en oublient la formule de la dérivée d'une composée.

II Erreurs spécifiques par exercice

Exercice 1

1. Les fonctions Arccos et Arcsin sont mal comprises : il ne suffit pas de résoudre $\sin(a) = \sin(3\pi/4)$ (pour le premier), mais bien de résoudre sur $[-\pi/2; \pi/2]$. Et donc ce n'est pas normal d'écrire $\arcsin(\dots) = \alpha$ avec $\alpha \notin [-\pi/2; \pi/2]$, ou d'écrire $\arccos(\dots) = \beta$ avec $\beta \notin [0; \pi]$.
2. Raisonnements pas toujours clairs pour le calcul. Penser à bien faire apparaître les limites utilisées. Pour déterminer la limite d'une somme/différence qui est une FI, on cherche avant tout à factoriser par le terme dominant (c'est le plus efficace). Et quand on compose, il faut bien vérifier la limite intermédiaire : pour la limite de $\dfrac{\ln(\ln(t))}{\ln(t)}$, ce n'est pas tout d'écrire que c'est la limite de $\dfrac{\ln(X)}{X}$ avec $X = \ln(t)$, et il faut aussi dire que X tend vers $+\infty$ pour conclure.
3. Certains oublient que Arccos est définie en ± 1. Donc il fallait bien les inclure dans les valeurs acceptables. Et tout l'enjeu était de justifier que $\sin(\arccos(x)) \geqslant 0$, ce que beaucoup ont oublié, et beaucoup d'autres ont mal justifié (annonçant par exemple que $\sin(\arccos(x)) > 0$, ce qui est faut). Pour l'ensemble de définition, certains trouvent la bonne formule, mais ne vérifient pas que la formule simplifiée et la formule d'origine sont définies sur le même ensemble (à savoir $[-1; 1]$).
4. Même problème pour que pour la 3 : la fonction Arcsin est bien définie en ± 1. En revanche, elle n'est pas dérivable en ± 1, donc il fallait bien que ça apparaisse. Méthode trop compliquée pour le début (certains, sans s'en rendre compte, montrent même le résultat de manière intermédiaire pour montrer le résultat). Il faut bien dire que arcsin est dérivable sur $]-1; 1[$ pour justifier la dérivabilité. Beaucoup d'erreurs de calculs sur le calcul de la dérivée. Et donc impossibilité de répondre à la dernière question. Trop peu de copies cherchent à simplifier le calcul de la dérivée trouvée, ce qui empêche de détecter une erreur de calcul : la dérivée devrait se simplifier, donc si elle ne se simplifie pas, c'est qu'il doit y avoir une erreur. D'autant plus dommage que cette question avait été traitée en TD.
5. Trop d'erreurs de calculs. Les calculs sont faits pour tomber juste (on l'a dit de nombreuses fois). Trop se retrouvent avec des calculs compliqués, et des résultats avec des racines de nombres affreusement grands. Pour le discriminant, on faisait apparaître le quatrième triplet pythagoricien ($(7, 24, 25)$ en l'occurrence) et les calculs tombaient juste. Et à noter aussi que, si on cherche une racine carrée δ de Δ, alors on ne peut directement avoir δ : on l'a à un $\pm$ près, comme $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow (-\delta)^2 = \Delta$. Il n'est donc pas normal, comme vu sur certaines copies, d'avoir des implications aboutissant à des valeurs de $\mathrm{Re}(\delta)$ ou $\mathrm{Im}(\delta)$ sans incertitude sur le signe. Et on n'écrit JAMAIS $\sqrt{z}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ (ça n'a aucun sens).

Exercice 2

1. Bien traitée. Attention avec les points/notations à introduire pas toujours clairs (ce que faisait très bien un dessin). Et beaucoup trop d'équivalences pour des "donc" (particulièrement à cette question).
2. Dérivabilité mal justifiée parfois (il faut bien dire que le numérateur ne s'annule pas). Certains dérivent comme un quotient (au lieu d'un inverse) ou regroupent en un seul quotient, ce qui complique les calculs et a parfois entraîné des erreurs.
3. On fixait α : il n'y avait pas à le faire varier, ou à le nommer. En particulier, il était plus légitime d'écrire "$\cos(\alpha) > 0$ et $\sin(\alpha) > 0$ comme $\alpha > 0$" plutôt que "pour tout $\alpha > 0, \dots$" (qui n'avait pas vraiment de sens ici). Le signe de $f'(\alpha)$ est mal étudié (alors qu'on pouvait constater sans difficulté que $\alpha \mapsto \sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha)$ était croissante sur I, ce qui facilite l'étude du signe).
4. Il fallait bien trouver un minimum pour f : certains s'offusque de trouver cela, et il aurait été plus judicieux de chercher à bien justifier la taille maximale du tableau, plutôt que d'annoncer une soit-disant erreur dans les variations de f.

Exercice 3 1. Beaucoup d'erreurs de calculs à la question c). Il ne faut pas bêtement rajouter des signes $-$ par endroits : pour passer de $(1+iz)^5$ à $(1-iz)^5$, il suffit de changer tous les i en $-i$. Trop peu font apparaître un lien avec la question a), et auraient dû se douter qu'il y avait une erreur de calcul.

2. Les questions a) et b) sont du cours et auraient dû être réussies par tout le monde. Des choses étranges à la question c), où trop peu font apparaître que $\alpha \neq -1$ (si c'était dans l'énoncé, c'est que c'était utile). Et d'autres utilisent la question b) alors que α n'est pas supposé de module 1 a priori. Et peu font le lien entre la d) et les questions a)b)c) alors que c'est ce qu'indiquait l'énoncé.
3. On avait cinq solutions exprimée de deux manières différentes : il fallait juste les regrouper par valeurs égales, mais avec un argument acceptable (en les triant par ordre croissante par exemple).
4. Pas traitée. Une formule de duplication ?

Problème :

1. Question de cours, qui ne devrait pas poser de problème, mais des erreurs étranges sur l'ensemble de définition avec la bonne formule (qui donne que la fonction sh est bien définie sur $\mathbb{R}$). Ou certains qui ne répondent pas à toute la question (oubliant la dérivée).
2. On utilise le théorème de la bijection monotone : il faut la continuité, la stricte monotonie, les limites, et le nom du théorème. On pouvait aussi invoquer le COROLLAIRE du TVI : le TVI donne l'existence, mais pas l'unicité.
3. Découlait directement de celui de sh (par symétrie). Beaucoup oublient les limties en $\pm\infty$.
4. Du cours : certains peuvent revoir la dérivabilité les bijections réciproques, puisqu'ils annoncent que sh ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: déjà c'est faux, et en plus ça n'a rien à voir.
5. On pouvait procéder de nombreuses manières : trop peu pensent à résoudre $\mathrm{sh}(t) = x$ (de paramètre x et d'inconnue t), alors qu'on a fait ce type de manipulations en TD ; et d'autres dérivent l'égalité sans préciser qu'on est sur un intervalle, en oubliant que pour primitiver on travailler à une constante près, et surtout avec une rédaction incompréhensible qui n'expliquent en rien ce qu'ils font ni sur quoi ils s'appuient.
6. et 7. et 8. Peu traitées. Sensiblement les mêmes erreurs qu'avant.