# DS n$^o$3

# I Exercices

**Exercice 1** [Proche du cours]

1. Puisque $\sin(3\pi/4) = \sin(\pi/4)$ et $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\boxed{\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}}$

   En revanche, $\frac{23\pi}{6} \notin [0, \pi]$ : on a $\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{23\pi}{6} - 4\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ par $2\pi$-périodicité et parité du cosinus, et donc : $\boxed{\arccos\left(\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}}$

2. (a) On factorise par le terme prépondérant $e^{2x}$ : $3x^2 - e^{2x} + 2 = e^{2x}\left(\frac{3x^2}{e^{2x}} - 1 + \frac{2}{e^{2x}}\right)$. Par croissances comparées, $\frac{3x^2}{e^{2x}}$ tend vers 0, et par sommes de limites, la parenthèse tend donc vers $-1$. Par produit de limites, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - e^{2x} + 2 = -\infty}$

   (b) De même : $\ln(t) - t + \sqrt{t} = -t\left(\frac{\ln(t)}{t} - 1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, et par croissances comparées et opérations sur les limites : $\boxed{\lim_{t\to+\infty} \ln(t) - t + \sqrt{t} = -\infty}$

   (c) Ce n'est pas une forme indéterminée ! Par quotient de limites : $\lim_{u\to 0} \frac{u^3}{\cos^2(u)} = 0$

   (d) Par composition de limites (avec $u = \ln(t)$ qui tend bien vers $+\infty$ en $+\infty$) : $\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(\ln t)}{\ln t} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)}{u} = +\infty}$ par croissances comparées.

   (e) On écrit que $\frac{\ln(1+t)}{\sin(t)} = \frac{\ln(1+t)}{t}\frac{t}{\sin(t)}$. Chacune des deux fractions tend vers 1 (on reconnaît le taux d'accroissement de $t \mapsto \ln(1+t)$ et l'inverse de celui de sin, qui tendent donc vers le nombre dérivé et l'inverse du nombre dérivé de ces fonctions en 0, mais ces nombres dérivés valent tous les deux 1), donc $\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)} = 1}$

3. arccos étant définie sur $[-1, 1]$ et sin sur $\mathbb{R}$, les deux expressions ont un sens pour $\boxed{x \in [-1, 1]}$.
   Pour un tel $x$, on a $\sin(\arccos x)^2 + \cos(\arccos x)^2 = 1$, et $\cos(\arccos x) = x$ par définition. Ainsi, $\sin(\arccos x)^2 = 1 - x^2$. Mais puisque $\arccos x \in [0, \pi]$, on a $\sin(\arccos x) \geqslant 0$. Donc $\boxed{\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}}$
   Par ailleurs, $\sin(2\arccos x) = 2\sin(\arccos x)\cos(\arccos x)$. D'après ce qu'on vient d'établir, on a donc $\boxed{\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1 - x^2}}$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On écrit directement que $\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| \leqslant \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ par stricte croissance et positivité de la racine carrée. C'est exactement dire que $\boxed{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in ]-1, 1[}$

   (b) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-1, 1[$ d'après la question précédente. arcsin est définie et dérivable sur $]-1, 1[$, donc par composition, $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \arcsin'\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

   Or :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

En reportant et en explicitant la dérivée de arcsin, on trouve donc que

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^{(3/2)}} = \frac{1}{1+x^2}$$

(c) On constate que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \arctan'(x)$. Les fonctions $f$ et arctan diffèrent donc d'une constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. En notant que $f(0) = \arctan(0)$, on en déduit finalement que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x)}$$

5. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = (8-5i)^2 - 4 \times 2 \times (4-13i) = 7 + 24i$. On recherche les deux racines carrées complexes de ce discriminant sous forme algébrique et on trouve que ces racines sont $4+3i$ et $-4-3i$. Les deux racines de l'équation initiale sont donc $\frac{-(8-5i)+(4+3i)}{4} = -1+2i$ et $\frac{-(8-5i)-(4+3i)}{4} = -3 + \frac{i}{2}$.

**Exercice 2** [Trigonométrie appliquée]

1. Notons $C$ le point d'intersection entre le segment $[AB]$ et la frontière du bas du couloir horizontal.

   Un peu de trigonométrie du triangle rectangle nous donne $\boxed{AB = AC + CB = \frac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}}$.

2. Sur $I$, les fonctions sin et cos sont dérivables et ne s'annulent pas.

   Donc par quotient, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \forall \alpha \in I, \quad f'(\alpha) = -\frac{3\sqrt{3}\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}$.

3. (a) $\forall \alpha \in I, \quad f'(\alpha) = \dfrac{-3\sqrt{3}\cos^3(\alpha) + \sin^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}$.

   Et comme $\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha) > 0$, $\boxed{f'(\alpha) \text{ est du signe du numérateur } \sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3}\cos^3(\alpha)}$.

   (b) On a $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)}$.

   (c) En posant $a = \sin(\alpha)$ et $b = \sqrt{3}\cos(\alpha)$, on remarque que : $\sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3}\cos^3(\alpha) = a^3 - b^3$.
   $a$ et $b$ sont strictement positifs donc $a^2+ab+b^2$ aussi.
   L'égalité $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ montre donc que $a^3-b^3$ est du signe de $a-b$.
   $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3}\cos^3(\alpha)$, lui-même du signe de $\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha)$.
   Conclusion : $\boxed{f'(\alpha) \text{ est du signe de } \sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha)}$.

   (d) On résout : Pour $\alpha \in I$,
   $\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha) > 0 \iff \sin(\alpha) > \sqrt{3}\cos(\alpha) \iff \tan(\alpha) > \sqrt{3} \iff \alpha > \frac{\pi}{3}$.
   Donc $\boxed{f' \text{ est strictement positive sur } \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\text{, strictement négative sur } \left]0, \frac{\pi}{3}\right[ \text{ et s'annule en } \frac{\pi}{3}}$.

4. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 6 + 2 = 8.$

| $\alpha$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\alpha)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(\alpha)$ | | $\searrow$ | $8$ | $\nearrow$ | |

Si on transporte un tableau, il doit passer tout le temps et on le fera pivoter pour passer d'un angle de 0 à $\frac{\pi}{2}$ en passant d'un couloir à l'autre : sa taille doit donc toujours être inférieure à $f(\alpha)$, et c'est donc un minorant de $f$ sur $I$. La taille maximale est le minimum de $f$ sur $I$, et on en déduit que la largeur maximale du tableau que l'on peut transporter dans le couloir est $\boxed{8 \text{ mètres}}$.

**Exercice 3** [Calcul de la tangente de $\frac{\pi}{5}$]

1. (a) Les coefficients sont réels et le discriminant positif : on trouve comme solutions $5-2\sqrt{5}$ et $5+2\sqrt{5}$.

   (b) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

   (c) En développant :

   $$(1+iz)^5 - (1-iz)^5 = 10iz - 20iz^3 + 2iz = 2iz(5 - 10z^2 + z^4)$$

   L'équation est donc équivalente à $z(z^4 - 10z^2 + 5) = 0$. En posant $X = z^2$, on est ramené à l'équation précédente, dont les solutions sont deux réels strictement positifs. On trouve donc comme solutions : $0, \sqrt{5-2\sqrt{5}}, -\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ et $-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

2. (a) Ce sont les $\exp i\frac{2k\pi}{5}$ pour $k \in [|0,4|]$.

   (b) Par factorisation par angle moitié : $e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$, et de même, $e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$.

   (c) L'équation est équivalente à $1 + iz = \alpha(1 - iz)$, elle-même équivalente à $iz(1+\alpha) = \alpha - 1$. Puisque $\alpha \neq -1$, l'unique solution de cette équation est donc $z = \frac{\alpha-1}{i(1+\alpha)} = \frac{i(1-\alpha)}{1+\alpha}$.

   (d) $z = i$ n'est effectivement pas solution de l'équation ($0 \neq 32$). L'équation est donc équivalente à $\frac{(1+iz)^5}{(1-iz)^5} = 1$, elle-même équivalente à $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = 1$.
   D'après la question 2.a, cette dernière égalité a lieu si et seulement si

   $$\exists k \in [|0,4|], \frac{1+iz}{1-iz} = \exp i\frac{2k\pi}{5}$$

   Or, pour $k \in [|0,4|], \exp i\frac{2k\pi}{5} \neq -1$ (car $\frac{2k\pi}{5}$ n'est pas congru à $\pi$ modulo $2\pi$). Ainsi, d'après la question précédente, $z$ est solution de l'équation si et seulement si

   $$\exists k \in [|0,4|, z = \frac{\exp i\frac{2k\pi}{5} - 1}{i(\exp i\frac{2k\pi}{5} + 1)} = \tan\frac{k\pi}{5}$$

   par simplification des expressions grâce à la question 2.b puis simplification des facteurs communs.

3. Les deux nombres $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$ sont donc des solutions de l'équation ; par ailleurs, elles sont positives, et on a $\tan\frac{\pi}{5} < \tan\frac{2\pi}{5}$ par croissance de tan sur $\int_0 \frac{\pi}{2}$. On en déduit que

   $$\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

4. Soit $x = \tan\frac{\pi}{10}$. En utilisant l'égalité $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$, il vient

   $$b = \sqrt{5-2\sqrt{5}} = \frac{2x}{1-x^2}$$

   c'est-à-dire $bx^2 + 2x - b = 0$.

   Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation ; on trouve deux racines, dont une seule positive ; c'est nécessairement $\tan\frac{\pi}{10}$, d'où

   $$\tan\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

# II Problème : Argument sinus hyperbolique

1. On a

$$\operatorname{sh}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\end{array}\right|$$

On a le tableau de variations suivant :
Pour $x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}^{\prime}(x)=\operatorname{ch}(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
2) D'après les variations, sh vérifie les hypothèses du théorème de la bijection (continuité, croissance stricte et limites sur l'intervalle $\mathbb{R}$ ).
Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y=\operatorname{sh}(x)$.
3) Par symétrie avec le tableau 1, on obtient le même tableau de variations pour Argsh.
4) La fonction sh est dérivable et sa dérivée, ch, ne s'annule pas. Ainsi, Argsh est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Argsh}^{\prime}(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x))}$$

Or $\operatorname{ch}^{2}(\operatorname{Argsh}(x))=1+\operatorname{sh}^{2}(\operatorname{Argsh}(x))=1+x^{2}$. Par positivité de ch, on obtient bien

$$\operatorname{Argsh}^{\prime}(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{sh}(x)+\operatorname{ch}(x)=\exp (x)$ et, comme à la question précédente, $\operatorname{ch}(x)=\sqrt{1+\operatorname{sh}^{2}(x)}$. On a donc

$$\operatorname{sh}(x)+\sqrt{1+\operatorname{sh}^{2}(x)}=\mathrm{e}^{x}$$

soit

$$x=\ln \left(\operatorname{sh}(x)+\sqrt{1+\operatorname{sh}^{2}(x)}\right)$$

Par définition (ou en évaluant cela en $\operatorname{Argsh}(x)$ ), on obtient bien

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \operatorname{Argsh}(x)=\ln \left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$$

Remarque : il était tout à fait possible d'étudier et de dériver $x \mapsto \ln \left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$ pour obtenir $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$, puis d'évaluer l'expression considérée en 0 .
On pouvait aussi résoudre en $x$ l'équation $y=\operatorname{sh}(x)$ en remarquant qu'elle était équivalente à une équation du second degré en $\mathrm{e}^{x}$.
6)
a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(2 t) & =\frac{\mathrm{e}^{2 t}-\mathrm{e}^{-2 t}}{2} \\
& =\frac{\left(\mathrm{e}^{t}\right)^{2}-\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^{2}}{2} \\
& =2 \times \frac{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{2} \\
\operatorname{sh}(2 t) & =2 \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule par la relation précédente et en utilisant $\mathrm{ch} = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2}$ :

$$\mathrm{sh}(2\,\mathrm{Argsh}(x)) = 2\,\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x))\,\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x)) = 2x\sqrt{1+x^2}$$

Ainsi, par définition,

$$2\,\mathrm{Argsh}(x) = \mathrm{Argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$$

7. a) On a : pour tout $x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \geqslant 1$. Comme la fonction $\sqrt{\cdot}$ est définie et dérivable sur $[1,+\infty[$ et comme Argsh est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f$ est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
   b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a directement

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right) &= 2\sqrt{1+x^2} + \frac{4x^2}{2\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2+x^2\right) \\ &= 2\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathrm{Argsh}'\left(2x\sqrt{1+x^2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+4x^2\left(1+x^2\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4x^4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left((1+2x^2)^2\right)^2}} \\ &= \frac{1}{1+2x^2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+2x^2} \\ f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

c) On observe que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\,\mathrm{Argsh}'(x)$. Ainsi, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\,\mathrm{Argsh}(x) + K$.
On calcule alors $f(0) = 0 = 2\,\mathrm{Argsh}(0)$, donc $K = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\,\mathrm{Argsh}(x) = \mathrm{Argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right) &= \ln\left(2x\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+4x^2\left(1+x^2\right)}\right)\\
&= \ln\left(2x\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\left(1+2x^2\right)^2}\right)\\
&= \ln\left(2x\sqrt{1+x^2}+1+2x^2\right) \qquad \left[\text{car } 1+2x^2>0\right]\\
&= \ln\left(x^2+2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2\right)\\
&= \ln\left[\left(x+\sqrt{1+x^2)}\right)^2\right]\\
&= 2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\\
\operatorname{Argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right) &= 2\operatorname{Argsh}(x).
\end{aligned}
$$