DS n^{o}2

I Sommes et sommes doubles

Exercice 1

1. Somme arithmétique de raison 3 : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}(3k-1) = (n-3)\cdot\frac{8+3n-4}{2} = \frac{(n-3)(3n+4)}{2}$

2. Somme arithmétique de raison 1, ou linéarité (au choix) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k+n = (n+2)\cdot\frac{n+2n+1}{2} = \frac{(n+2)(3n+1)}{2}$

3. Somme binomiale : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}+1\right)^n = \frac{5^n}{3^n}$

4. Somme géométrique de raison $3 \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}\frac{3^{k-1}}{2^4} = \frac{1}{16}\frac{1-3^{n+2}}{1-3} = \frac{3^{n+2}-1}{32}$

5. Somme géométrique de raison $(1-x)^3$: deux cas :
   — si $(1-x)^3 = 1$ (c'est-à-dire $x=0$) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(1-x)^{3k} = \sum_{k=2}^{n-1} 1 = n-2$;
   — si $(1-x)^3 \neq 1$ (c'est-à-dire $x \neq 0$) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(1-x)^{3k} = (1-x)^6\frac{1-(1-x)^{3n-6}}{1-(1-x)^3} = \frac{(1-x)^6-(1-x)^{3n}}{1-(1-x)^3}$

6. Somme géométrique de raison $\dfrac{(x-1)}{(x+1)^{-1}} = (x-1)(x+1) = x^2-1$:
   — si $x^2-1 = 1$ (c'est-à-dire $x = \pm\sqrt{2}$) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-1)^k}{(x+1)^{-k}} = \sum_{k=0}^{n+1} 1 = n+2$;
   — si $x^2-1 \neq 1$ (c'est-à-dire $x \neq \pm\sqrt{2}$) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-1)^k}{(x+1)^{-k}} = \sum_{k=0}^{n+1}(x^2-1)^k = 1\cdot\frac{1-(x^2-1)^{n+2}}{1-(x^2-1)} = \frac{(x^2-1)^{n+2}-1}{x^2-2}$

7. Somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}(k+1)^5 - k^5 = (n+3)^5 - 1$

8. Somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}\cos(2k+1) - \cos(2k-1) = \cos(2n-1) - \cos(5)$

9. Linéarité, et on se ramène à somme quadratique et arithmétique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+3)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2+6k+9 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3n(n+1)+9(n+1) = \frac{(n+1)}{6}\left((n+1)(2n+1)+18n+54\right) = \frac{(n+1)(2n^2+19n+54)}{6}$

10. Binôme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^n\cdot n^k = 2^n\cdot\left((n+1)^n-1\right) = (2n+2)^n - 2^n$

11. Somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-3}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-3}\ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n-2) - \ln(1) = \ln(n-2)$

12. On calcule aussi la somme des termes de rangs impairs (comme dans le cours et suggéré par l'indication). On pose $A = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 4^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k}$ et $B = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1}$. Alors :

$$A + B = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} 2^l = 3^n \text{ et } A - B = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-2)^l = (1-2)^n = (-1)^n$$

et finalement : $A = \frac{(A+B)+(A-B)}{2} = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$ et $B = \frac{(A+B)-(A-B)}{2} = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$.

13. On coupe la somme en deux suivant la parité de k, qu'on regroupe par linéarité : $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = \sum_{l=1}^{n} 2l - \sum_{l=1}^{n} (2l-1) = \sum_{l=1}^{n} 1 = n$

14. Idem : $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{l=1}^{n} (2l)^2 - \sum_{l=1}^{n} (2l-1)^2 = \sum_{l=1}^{n} (4l-1) = n \cdot \frac{3+4n-1}{2} = n(2n+1)$

15. On utilise la formule du capitaine puis un binôme : $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} n \binom{n-1}{l} = n2^{n-1}$

16. On utilise deux fois la formule du capitaine et on fait apparaître un binôme : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} n(k-1) \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} = \sum_{l=0}^{n-2} n(n-1) \binom{n-2}{l} = n(n-1)2^{n-2}$

17. On utilise la formule du capitaine dans l'autre sens et on fait apparaître un binôme : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{l} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

18. On a un télescopage sur deux indices : $\sum_{k=2}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} - \sqrt{1}$

19. On développe et on reconnaît par linéarité des sommes cubique, quadratique et arithmétique : $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3k^2 + 2k = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{n(n+1)}{4} (n(n+1) + (4n$
$\frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 2

1. $\sum_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n} k + l$:
Pour $n = 1$, on trouve : 2.
Formule générale : $\sum_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n} k+l = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} (k+l) = \sum_{l=1}^{n} \frac{l(l+1+2l)}{2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{3l^2+l}{2} = \frac{3}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4} (2n+1+1) = \frac{n(n+1)^2}{2}$
Bonne valeur pour $n = 1$.

2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} 2k$

Pour $n=1$, on trouve : 2

Formule générale : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} 2k = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} 2k = \sum_{l=1}^{n} l(l+1) = \sum_{l=1}^{n} l^2+l = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} =$
$\displaystyle\frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Bonne valeur pour $n=2$.

3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k< l\leqslant n} kl$

Pour $n=1$, on trouve : 0 (somme vide)

Formule générale : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k< l\leqslant n} kl = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l-1} kl = \sum_{l=1}^{n}(l-1)\frac{l+l^2-l}{2} = \sum_{l=1}^{n}\frac{l^3-l^2}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{8} -$
$\displaystyle\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)}{24}(3n(n+1)-2(2n+1)) = \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2}{24}$

Bonne valeur pour $n=1$.

4. $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} \frac{k}{l}$

Pour $n=1$, on trouve : 1

Formule générale : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} \frac{k}{l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\frac{k}{l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{l(l+1)} 2l = \sum_{l=1}^{n}\frac{l+1}{2} = n\frac{1+\frac{n+1}{2}}{2} = \frac{2n+n(n+1)}{4} =$
$\displaystyle\frac{n(n+3)}{4}$

Bonne valeur pour $n=1$.

5. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant l\leqslant n} \binom{l}{k}2^l$

Pour $n=1$, on trouve : $\binom{0}{0}2^0+\binom{1}{0}2^1+\binom{1}{1}2^1 = 1+2+2=5.$

Formule générale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant l\leqslant n} \binom{l}{k}2^l = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}2^l = \sum_{l=0}^{n}2^l2^l = \sum_{l=0}^{n}4^l = 1\cdot\frac{4^{n+1}-1}{4-1} = \frac{4^{n+1}-1}{3}.$

Bonne valeur pour $n=1$.

6. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} \binom{n+1}{k} l^k$

Pour $n=1$, on trouve : $\binom{2}{0}0^0+\binom{2}{0}1^0+\binom{2}{1}0^1+\binom{2}{1}1^1 = 1+1+0+2=4.$

Formule générale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} \binom{n+1}{k} l^k = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} l^k = \sum_{l=0}^{n}\left((l+1)^{n+1}-l^{n+1}\right) = (n+1)^{n+1}$

Bonne valeur pour $n=1$.

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cdot 3^k$

Pour $n=1$, on trouve : 3

Formule générale : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cdot 3^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k-1} 3^k = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l+1}^{n} 3^k = \sum_{l=0}^{n} 3^{l+1}\frac{3^{n-l}-1}{3-1} = \sum_{l=0}^{n}\frac{3^{n+1}-3^{l+1}}{2} =$
$\displaystyle\frac{n+1}{2}3^{n+1} - \frac{3}{2}\frac{3^{n+1}-1}{3-1} = \frac{2n-1}{4}3^{n+1}+\frac{3}{4}$

Bonne valeur pour $n=1$.

8. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} \min(k,l)$

   Pour $n=1$, on trouve : $0+0+0+1=1$.

   Formule générale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} \min(k,l) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\min(k,l) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k}\min(k,l)+\sum_{l=k+1}^{n}\min(k,l)\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k} l + \sum_{l=k+1}^{n} k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2}+k(n-k)\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2n+1}{2}k - \frac{k^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Bonne valeur pour $n=1$

9. $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} |k-l|$

   Pour $n=1$, on trouve : $0+1+1+0=2$.

   Formule générale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} |k-l| = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}|k-l| = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k}|k-l|+\sum_{l=k+1}^{n}|k-l|\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k}(k-l)+\sum_{l=k}^{n}\right.$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n}k^2-nk+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)^2}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3n+3n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   Bonne valeur pour $n=1$.

II Produits

Exercice 3

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} 5k = 5^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1} k = 5^{n+1}(n+1)!$
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n-1} 2k^2 = 2^{n-2}\left(\prod_{k=2}^{n-1} k\right)^2 = 2^{n-2}((n-1)!)^2$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{l=1}^{2n+1} l}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n(n!)}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{3k+1} = 3^{\sum_{k=1}^{n} 3k+1} = 3^{\frac{n(3n+5)}{2}}$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{n-k} = 3^{\sum_{k=1}^{n} n-k} = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$
6. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(k+1) = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right) = (n!)\cdot((n+1)!) = (n+1)\cdot(n!)^2$
7. $\displaystyle\prod_{k=3}^{n-2}\frac{k}{k+1} = \frac{3}{n-1}$

8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 7^{k^2} = 7^{\sum_{k=1}^{n} k^2} = 7^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(9k^2-1) = \prod_{k=1}^{n}(3k-1)(3k+1) = \frac{\prod_{l=1}^{3n+1} l}{\prod_{k=1}^{n} 3k} = \frac{(3n+1)!}{3^n(n!)}$

III Systèmes

Exercice 4

1. $(5,1,-2)$ est l'unique solution ;
2. pas de solution ;
3. on peut choisir x ou z comme paramètre. On trouve : $S = \{(-2/7-z, 3/7, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(x, 3/7, -2/7-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ suivant le paramètre choisi.
4. $(-1,4,2)$ comme unique solution.

Exercice 5

1. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & & & = & a^2 \\ x & - & y & + & 3z & = & a^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ & & y & - & z & = & a^2-a \\ & & & & 0 & = & a^3+2a^2-3a \end{array}\right.$;
   - si $a^3+2a^2-3a \neq 0$: c'est-à-dire $a \notin \{-3,0,1\}$ alors il n'y a pas de solution ;
   - sinon : c'est-à-dire $a \in \{-3,0,1\}$ alors dernière équation disparaît et le système devient :
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ & & y & - & z & = & a^2-a \end{array}\right.$$
   dont les solutions forment : $\{(2a-2z-a^2, z+a^2-a, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$
2. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ & & & & (-a^2+a+6)z & = & 3-a \end{array}\right.$;
   - si $a^2-a-6 \neq 0$: c'est-à-dire $a \notin \{-2,3\}$: on a un système échelonné, qui possède comme unique solution : $\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)$ (qui a bien un sens comme $a \neq -2$)
   - si $a=-2$: alors la dernière équation devient $0=1$, donc le système n'a pas de solution ;
   - si $a=3$: alors la dernière équation disparaît, et le système devient :
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$
   dont les solutions forment l'ensemble $S = \{(5z, 1-4z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
3. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & ay & + & 4z & = & 8-a \\ -x & - & ay & + & (a^2-3a-2)z & = & 2a-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & & + & 2z & = 4 \\ & ay & & & = -a \\ & & & (a^2-3a)z & = a \end{array}\right.$
   - si $a^2-3a \neq 0$: c'est-à-dire $a \notin \{0,3\}$: on a un système échelonné qui possède une unique solution qui est : $\left(\frac{4a-14}{a-3}, -1, \frac{1}{a-3}\right)$;
   - si $a=0$: seule la première équation reste, et le système devient : $x+2z=4$, qui admet comme ensemble solution : $S = \{(4-2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$;
   - si $a=3$: la dernière équation devient $0=3$, qui n'a pas de solution, donc le système n'a aucune solution.